L'*OSTRACON MATHÉMATIQUE 153*

Les textes mathématiques qui nous sont parvenus de l'Égypte ancienne ont été, pour la plupart, rédigés sur du papyrus, le principal support d'écriture. Il en est ainsi, du plus important document, le *Papyrus Rhind*[1], écrit par le scribe Âhmès, vers 1500 avant notre ère à partir d'un ou plusieurs textes rédigés deux siècles auparavant. Mais d'autres supports ont pu être utilisés. Ainsi, nous possédons un *Rouleau de cuir*[2], des *Tablettes de bois*[3], et des *ostraca* sur lesquels figurent des écrits mathématiques. Rappelons que les archéologues désignent sous le nom d'ostracon (au pluriel, ostraca), tout fragment de poterie ou même de pierre sur lequel on relève diverses inscriptions. Outre l'*Ostracon 153* que nous considérons ici, deux autres ostraca ont retenu l'attention des historiens des mathématiques : l'*Ostracon 57170* du Musée de Turin[4] et l'*Ostracon JE50036 du Caire*[5]. Le premier comporte la fin de cinq lignes de texte, toutes commençant par *djéd.khér.èk* (Dd.xr.k)[6] soit « *tu diras* », suivies de données ou résultats métrologiques exprimés à l'aide des unités de mesure de capacité, le *khar* et la *héqat*. Comme l'*Ostracon 153*, il est daté, du Nouvel Empire, c'est-à-dire entre 1500 et 1000 avant notre ère. Quant au second, daté du roi Djésèr qui régnait vers 2700 avant notre ère, il « *consiste en un schéma d'architecte qui a été tracé probablement dans le but de servir de support graphique à la construction d'une voute* [7]» pour lequel Gunn souligne « *the curve does not appear to be part of an ellipse*[8] » alors que Marianne Michel laisse planer le doute. En l'absence d'explications, il n'est pas toujours facile de trancher. Nous allons voir qu'il en est de même pour l'*Ostracon 153*. En effet, bien que, à notre connaissance, ceux qui ont commenté ce document soient assez nombreux, nous pouvons citer William Hayes[9], Otto Neugebauer[10], Richard Gillings[11], Silvia Couchoud[12], Marshall Clagett[13] et enfin Annette Imhausen[14], nous pourrons constater que leurs opinions sont diverses et variées mais, dans l'ensemble, erronées. Aussi, avant de présenter leurs hypothèses, sur la base des autres textes mathématiques qui nous sont parvenus de l'Égypte ancienne, nous formulerons tout d'abord nos propres réflexions laissant ainsi le lecteur libre de se forger sa propre opinion.

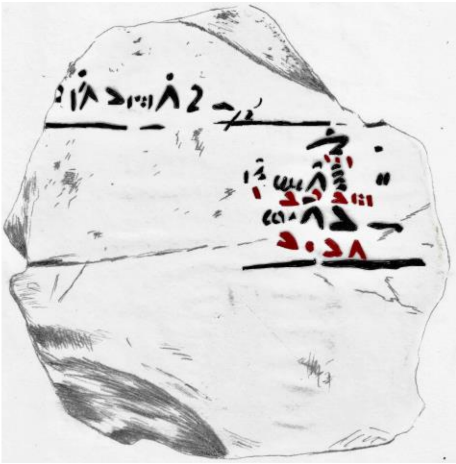
Introduction générale

Avant la deuxième guerre mondiale, le Metropolitan Museum of Art de New York a conduit des fouilles dans une des tombes de Sénénmout[15] à Thèbes. Plusieurs ostraca y ont été trouvés et, en 1942, Hayes en a assuré leur publication. Le 10 juillet 2009, suite à notre demande d'une reproduction photographique, Morena Stefanova, chercheuse associé au département d'égyptologie du Metropolitan Museum of Art de New York nous a aimablement répondu : « *I am sorry to inform you that the ostracon number 153 never been accessioned to the Egyptian*

---

1 Voir, sur notre site papyrusrhind.unblog.fr.
2 Voir, sur notre site papyrusrhind.unblog.fr, dans l'annexe documents, le *Rouleau de cuir*.
3 Voir, sur notre site papyrusrhind.unblog.fr, dans l'annexe documents, les *Tablettes du Caire*.
4 Voir Lòpez, 1980, *Ostraca Ieratici* ou Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, p. 363.
5 Voir Gunn, 1926_2, An architect's diagram of the third dynasty.
6 Nous donnons d'abord la transcription vocalisée puis, en caractères Arial, la transcription savante.
7 Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, pp. 344-345.
8 Gunn, 1926_2, An architect's diagram of the third dynasty, p. 200.
9 Hayes, 1942, *Ostraka and name stones from the tomb of Sen-Mūt,* pp. 29-30, pl. XXIX.
10 Neugebauer, 1969 (1990), *The exact sciences in antiquity*.
11 Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*.
12 Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes.*
13 Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book, vol 3*.
14 Imhausen, 2016, *Mathematics in Ancient Egypt. A Contextual History*, pp. 131-132.
15 Les transcriptions des noms égyptiens varient selon les auteurs. Ici, on peut trouver aussi Sen-Mût, Senmut ou encore Senenmout. Notre convention de transcription vocalisée nous conduit à mettre les accents sur la lettre e.

Collection at the Metropolitan Museum of Art and it has been returned to the Cairo Museum ». Nous la remercions vivement de cette information. Nous ne savons pas sous quelle référence cet ostracon est répertorié au Musée du Caire. Le numéro que nous indiquons est celui de la publication précitée.



Reproduction de l'*Ostracon 153*

Sénénmout[16]

Sénénmout est souvent présenté comme étant l'homme de confiance de la reine de la XVIIIe dynastie, Hatschépsout, dont le règne peut être situé vers 1500 avant notre ère. En particulier[17], Sénénmout aurait exercé les fonctions de trésorier, d'architecte ou encore de précepteur de la fille de la reine, Néférourê. Il s'est fait aménager deux tombes, l'une à Gourna, d'où provient l'*Ostracon 153*, l'autre à Deir èl-Bahari, dans l'enceinte du temple funéraire d'Hatschépsout. Pour notre propos, nous devons surtout noter que Sénénmout était un homme de culture. « *Ses réalisations en tant qu'architecte le montrent mais aussi la présence dans sa tombe de Deir el-Bahari d'un plafond astronomique, et dans celle de Gourna d'environ 150 ostraca, parmi lesquels figurent bon nombre de dessins, notamment deux plans de la même tombe, des listes, calculs et mémoires divers et des copies de textes religieux, funéraires et littéraires* : Satire des métiers, Conte de Sinouhé, Enseignement d'Amenemhat Ier, *etc*. [18]». Notons qu'en dehors de l'*Ostracon 153* nous pourrions considérer aussi les ostraca 62 69, 73, 75 et 76 qui fournissent des relevés architecturaux[19].

L'*Ostracon 153* a pour dimensions 10 par 10 centimètres. Il comporte deux exercices dont le premier nous est sans doute parvenu de manière incomplète. Le second est écrit entre deux traits horizontaux semblables à ceux qui séparent les divers *exemples* du *Papyrus Rhind*. Toutefois, la disposition est un peu curieuse. Les deux exercices sont écrits de manière « opposée », le premier commençant à la hauteur de la fin du second et ne semble pas occuper tout le haut de l'ostracon qui est sans écriture : une seule ligne. De plus, le premier trait horizontal court sur toute la largeur de l'ostracon tandis que le second s'arrête à la fin du deuxième exercice. Tout ceci peut laisser à penser, qu'ainsi, nous possédons peut-être seulement une partie d'un document plus important. Nous verrons que ceci entraîne une difficulté de transcription de la première partie.

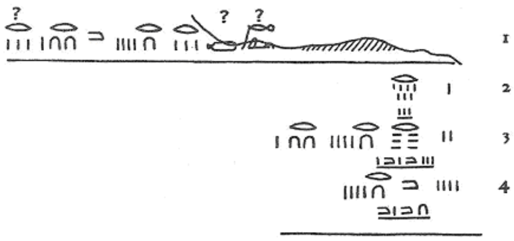
[16] Peck, Ross, 1978, *Dessins égyptiens*, pl. IV. Ostracon provenant de la deuxième tombe à Deir el-Bahari. New York, Metropolitan Museum of Art, n°36.3.252.

[17] Voir, par exemple, Vandersleyen, 1995, *L'Égypte et la vallée du Nil*, pp. 290-292.

[18] Grimal, 1988, *Histoire de l'Égypte ancienne*, p. 252.

[19] On peut aussi prendre en compte l'ostracon relatif à des données architecturales trouvé dans le Cénotaphe de Séthi 1er roi de la XIXe dynastie. Voir Frankfort, De Buck, Gunn, 1933, *The Cenotaph of Seti I at Abydos*.

Voici la reproduction qu'a donné Hayes de l'*Ostracon 153* :

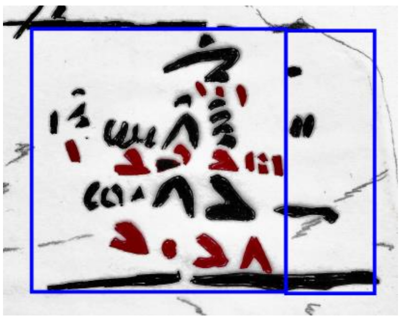


Transcription hiéroglyphique de droite à gauche conformément au texte hiératique

Toutefois, comme Âhmès, le scribe qui a rédigé l'*Ostracon 153* a employé les deux couleurs habituelles d'encre, la noire et la rouge (soulignée dans la transcription hiéroglyphique), cette dernière pour indiquer ce que nous appelons les *auxiliaires numériques*, palliatifs à nos réductions au même dénominateur. Autant dire qu'il a accordé une importance certaine au texte qu'il écrivait. Il se peut qu'il ait été lié à l'enseignement dispensé à la fille de la reine ou à tout autre élève de haut rang. Au vu de certaines difficultés, contrevenant à l'ordre d'écriture, nous commençons par commenter le deuxième exercice.

Le deuxième exercice

Le deuxième exercice nous est sans doute parvenu de manière complète. Par l'emploi des encres noire et rouge, le scribe souligne son importance et le soin qu'il apporte à sa résolution. Nous avons une présentation opératoire en deux colonnes que nous avons encadrées en bleu et mis en bleu pour la première colonne :



1	1/7		
	3		
2	1/6	1/14	1/21
	3 1/2	**1 1/2**	**1**
4	1/2	1/14	
	10 1/2	**1 1/2**	

Les *auxiliaires numériques*

Nous pouvons commencer par considérer les nombres écrits en rouge. Comme nous l'avons dit précédemment, il s'agit de l'application d'une technique qu'à la suite de Neugebauer, nous appelons *utilisation des auxiliaires numériques*. Dans le *Papyrus Rhind*, elle est mise en œuvre plusieurs fois. Toutefois, Âhmès n'emploie pas toujours l'encre rouge, d'où la dénomination préférée à celle d'*auxiliaires rouges* choisie par certains commentateurs. Cette procédure est un palliatif à nos réductions au même dénominateur employé pour sommer diverses expressions numériques « fractionnaires », les *auxiliaires numériques* étant alors les numérateurs correspondants. Pour les scribes égyptiens, ils ne sont pas nécessairement des nombres entiers. Dans le cas de l'*Ostracon 153*, il faut donc choisir un dénominateur commun, que nous appelons *référent commun* et notons R tel que

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{R}\times 3\ \ ,\ \ \frac{1}{6}=\frac{1}{R}\times\left(3+\frac{1}{2}\right)\ \ ,\ \ \frac{1}{14}=\frac{1}{R}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\ \ ,\ \ \frac{1}{21}=\frac{1}{R}\times 1\ ,$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{R}\times\left(10+\frac{1}{2}\right)\ \ ,\ \ \frac{1}{14}=\frac{1}{R}\times\left(1+\frac{1}{2}\right).$$

Nous pouvons remarquer qu'au lieu de notre notation d'aujourd'hui sous la forme $3/R$ nous employons la multiplication semblable, sans doute aussi pour les scribes égyptiens, à notre appellation 3 R-ièmes, autrement dit en prenant les R-ièmes comme de nouvelles unités. Nous voyons immédiatement que le référent commun R doit être égal à 21 :

$$R=21\,.$$

Ce choix peut nous étonner. En fait, il est assez classique dans le sens où nous devons additionner des expressions numériques obtenues par *doublements successifs* et le choix se porte alors sur l'inverse du plus petit quantième. Toutefois, nous verrons que ceci n'est pas général (voir, ultérieurement, l'*exemple* R13 du *Papyrus Rhind* où le scribe choisit pour toute une série d'*exemples* le même *référent commun*). Ceci étant, une fois que le *référent commun* est choisi, les *auxiliaires numériques* sont déterminés par division :

$$21:7=3\ \ ,\ \ 21:6=3+\frac{1}{2}\ \ ,\ \ 21:14=1+\frac{1}{2}\ \ ,\ \ 21:1=1\ \ ,\ \ 21:2=10+\frac{1}{2}.$$

Or, à tous les nombres de la deuxième colonne qui sont écrits en noir, le scribe fait correspondre un *auxiliaire numérique*. Ainsi, il nous indique qu'il faut tous les additionner. Nous avons alors

$$\frac{1}{7}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{14}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{21}\times 3\right)+\left[\frac{1}{21}\times\left(3+\frac{1}{2}\right)\right]+\left[\frac{1}{21}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]+\left(\frac{1}{21}\times 1\right)+\left[\frac{1}{21}\times\left(10+\frac{1}{2}\right)\right]+\left[\frac{1}{21}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{21}\times\left(3+3+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+1+10+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{21}\times 21=1\,.$$

Ayant additionné tous les nombres écrits en noir de la deuxième colonne nous devons aussi additionner ceux de la première colonne. Leur somme est égale à 7 :

$$1+2+4=7\,.$$

Nous en déduisons que cet exercice présente, en fait, une manière de multiplier 1/7 par 7 dont le résultat est évidemment égal à la somme précédemment trouvée, à savoir, 1 :

$$\frac{1}{7}\times 7=1\,.$$

Deux expressions du double du quantième 1/7

Nous disons bien « une manière de procéder » car le scribe donne 1/6 1/14 1/21 comme expression du double de 1/7 alors que « classiquement », nous nous attendrions à trouver 1/4 1/28 comme nous le lisons dans le *Papyrus Rhind* (R2/7) ou dans le *Fragment UC 32159-F de El-Lahoun* ou encore dans les *Tablettes de bois CG 25 367 et 25 368 du Musée du Caire*[20], à savoir :

[20] Daressy, 1906, Calculs égyptiens du Moyen Empire, p. 65. Voir aussi notre annexe : *Tablettes du Caire*.

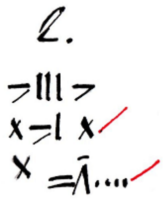
$$\frac{1}{7} \times 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}.$$

Autrement dit, nous nous attendrions à lire la multiplication commentée suivante

\ 1	1/7	(initialisation)
\ 2	1/4 1/28	(*doublement* et R2/7)
\ 4	1/2 1/14	(*doublement*)
Total	1	

Le scribe utilise donc une expression non traditionnelle du double de 1/7, à savoir, 1/6 1/14 1/21. Rappelons la division de 2 par 7 que donne Âhmès dans le *Papyrus Rhind* :

R2/7



	1	7	(initialisation)
	1/2	3 1/2	(*dédoublement*)
\	1/4	1 1/2 1/4	(*dédoublement*)
\ 4	1/28	1/4	(inversion-multiplication)

Elle conduit à l'expression 1/4 1/28 qui, outre les textes égyptiens précités, semble être celle qui est le plus souvent retenue par les arithméticiens égyptiens et leurs successeurs grecs ou byzantins quand ce ne sont pas les savants du Moyen Âge comme Léonard de Pise, lorsqu'il publie, en 1202, son fameux ouvrage, le *Liber abbaci*[21]. En fait, nous pouvons dire que cette *décomposition* est la « meilleure » possible : nombre minimal de quantièmes, à savoir, 2, quantièmes inverses de nombres multiples de 4 donc utiles pour des *doublements successifs*, obtention aisée à l'aide de *dédoublements successifs*, *manque* immédiat puisque les quantièmes sont binaires et enfin quantièmes assez grands.

Nous pouvons donc penser que l'expression écrite par le scribe qui a rédigé l'*Ostracon 153* a sans doute une valeur pédagogique. Volontairement, une expression sortant de l'ordinaire a été utilisée. En fait, nous savons que lors des *expressions de 2 à partir d'un entier*, l'Auteur du *Papyrus Rhind* choisit moins souvent les multiplicateurs binaires, 1/2, 1/4, 1/8, … que les multiplicateurs ternaires, 2/3, 1/3, 1/6, 1/12, … Par conséquent, nous ne devons pas nous étonner si ce sont ces derniers qui conduisent à l'expression considérée. En effet, dans ce cas, nous pouvons avoir la division commentée suivante de 2 par 7 :

1	7	(initialisation)
2/3	4 2/3	(table de deux-tiers)
1/3	2 1/3	(*dédoublement*)
\ 1/6	1 1/6	(*dédoublement*)
Manque	1/2 1/3	$\left(2 - \left(1 + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$
1/7	1	(inversion)
\ 1/14	1/2	(multiplication-inversion : 7 × 2 = 14)
\ 1/21	1/3	(multiplication-inversion : 7 × 3 = 21)

[21] Léonard de Pise, 1202 (1857), *Liber abbaci*, p. 80.

L'expression du quadruplement

Ayant donc choisi les multiplicateurs ternaires, il n'en demeure pas moins que, pour le multiplicateur 4 de la division qui est présentée, le scribe donne comme résultat celui que l'on obtiendrait avec les multiplicateurs binaires, à savoir, 1/2 1/14 :

$$\frac{1}{7} \times 4 = \left(\frac{1}{7} \times 2\right) \times 2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) \times 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}.$$

Mais l'exercice tel qu'il est présenté revient à opérer un *doublement* de l'expression 1/6 1/14 1/21. Un scribe pourrait opérer comme suit en utilisant l'expression « classique » du *doublement* de 1/21, à savoir, 1/14 1/42 et la réduction de 1/7 1/42 en 1/6 qui est employée dans le *Papyrus Rhind* :

$$\frac{1}{7} \times 4 = \left(\frac{1}{7} \times 2\right) \times 2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}\right) \times 2 = \left(\frac{1}{6} \times 2\right) + \left(\frac{1}{14} \times 2\right) + \left(\frac{1}{21} \times 2\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{42}\right) + \frac{1}{14} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}.$$

Sans ces réductions, le scribe aurait dû considérer l'expression *a priori* « moins simple » 1/3 1/7 1/14 1/42 mais qui, en introduisant le nombre 42 comme *réducteur commun*, conduirait à des *auxiliaires numériques* entiers et donc simplifierait la totalisation :

$$\frac{1}{7} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{42} \times 6\right) + \left(\frac{1}{42} \times 7\right) + \left(\frac{1}{42} \times 3\right) + \left(\frac{1}{42} \times 2\right) + \left(\frac{1}{42} \times 14\right) + \left(\frac{1}{42} \times 6\right) + \left(\frac{1}{42} \times 3\right) + \left(\frac{1}{42} \times 1\right)$$

$$= \frac{1}{42} \times (6 + 7 + 3 + 2 + 14 + 6 + 3 + 1) = \frac{1}{42} \times 42 = 1 .$$

Autrement dit, la considération de l'expression particulière du double du quantième 1/7 n'a pas un grand intérêt arithmétique ce qui lui confère, en revanche, une valeur pédagogique.

D'autres hypothèses

Nous l'avons dit en introduction, les interprétations sont diverses. Bien que, pour le premier exercice, Hayes dise qu'il a effectué « *a search through the extand mathematical papyri and ostraka* [22]», il semble que sa formation, plutôt littéraire et artistique, ne lui ait pas permis de trop rentrer dans les détails de l'arithmétique égyptienne pour comprendre la nature et la pratique que nous venons de décrire. La consultation d'autres ostraca qui sont des relevés architecturaux l'a sans doute conduit à fixer son attention sur certains aspects métrologiques et à voir, dans le deuxième exercice, une progression ou une table de multiplication de paumes exprimées en coudées (royales)[23] :

$$1\ (paume) = \frac{1}{7}\ (coudée)\ ,$$

$$2\ (paumes) = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}\ \left(ou\ \frac{2}{7}\ coudée\right),$$

$$4\ (paumes) = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}\ \left(ou\ \frac{4}{7}\ coudée\right).$$

[22] Hayes, 1942, *Ostraka and name stones from the tomb of Sen-Mūt*, p. 29.
[23] Hayes, 1942, *Ostraka and name stones from the tomb of Sen-Mūt*, pp. 29-30.

Bien sûr, toutes ces égalités sont exactes. Mais Hayes ne peut pas expliquer leur origine. De plus, dans le cadre des équivalences métrologiques, il est difficile de voir l'intérêt de telles expressions. En revanche, si le scribe avait retenu l'expression classique 1/4 1/28 pour l'expression du double de 1/7, il aurait pu facilement en déduire que 2 paumes valent 1/4 de coudée et 1 doigt puisque qu'une paume vaut 4 doigts. Quittant le domaine métrologique et abordant le cadre arithmétique, il n'a pas compris la technique des *auxiliaires numériques*. En effet, il écrit : « *the fractions in the left-hand column are multiplied by the denominator of the answer, that is, 21* [24]». Or ce ne peut pas être la multiplication de 1/7 par 21,

$$\frac{1}{7} \times \color{blue}{21} = \color{red}{3}\,,$$

qui exigerait de fastidieux calculs, mais, comme nous l'avons indiqué, la division de 21 par 7 :

$$\color{blue}{21} : 7 = \color{red}{3}\,.$$

L'opinion formulée par Neugebauer[25] est plus conforme à la réalité, du moins, si l'on se réfère au texte d'origine en anglais et non pas à sa traduction française : « *Obviously we have dealing here with a multiplication of* $\overline{7}$ » a été rendu par « *Il s'agit évidemment d'une table de multiplication par* $\overline{7}$ ». La multiplication de 1/7 est devenue une table de multiplication par 1/7 : hasard des traductions ! Comme nous l'avons indiqué, il s'agit bien d'une multiplication de 1/7, plus précisément, par 7. Mais il est moins heureux lorsqu'il considère la division de 2 par 7 afin d'obtenir l'expression 1/6 1/14 1/21 :

On voit là que nous avons affaire non pas à la fraction naturelle $\overline{4}$ de la série $\overline{2}$, $\overline{4}$, … , mais à $\overline{3}$ qui fait partie de la séquence $\overline{\overline{3}}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$,… On obtient donc $\overline{21}$ pour l'un des termes, et nous devons trouver le reste qui est obtenu en multipliant $\overline{7}$ par 2 - $\overline{3}$ = 1 $\overline{\overline{3}}$. Nous savons déjà que $\overline{\overline{3}}$ = $\overline{2}$ $\overline{6}$. Nous devons donc multiplier $\overline{7}$ par 1 $\overline{2}$ $\overline{6}$. Il faut introduire, ici encore, un nombre auxiliaire, en mettant 1 pour $\overline{6}$, ce qui donne :

/	1	6
	$\overline{2}$	3
/	$\overline{6}$	1.

En prenant le premier et le dernier terme, nous avons 7 nouvelles unités. On voit alors que 1 $\overline{6}$ de $\overline{7}$ vaut $\overline{6}$. Il reste $\overline{2}$ de $\overline{7}$ soit $\overline{14}$. On a donc trouvé pour le reste $\overline{6}$ $\overline{14}$, et pour le tout du double de $\overline{7}$ on aura l'expression :

$$\overline{6}\ \ \overline{14}\ \ \overline{21}.$$

S'il a bien compris certains principes pour mener à bien une division, en particulier, la suite des multiplicateurs binaires ou ternaires, il semble raisonner à l'envers en retenant, sans qu'il en ait exprimé la raison, le quantième 1/21 dans l'expression du résultat. Or, prenant alors 1/21 comme multiplicateur du diviseur 7, on obtient 1/3 comme résultat. Pour parvenir au dividende 2, il manque donc la différence entre 2 et 1/3, soit 1 2/3 ou encore 1 1/2 1/6. Il ne reste plus

[24] Hayes, 1942, *Ostraka and name stones from the tomb of Sen-Mūt*, p. 30.

[25] Neugebauer, 1969, *The exact sciences in antiquity*, p. 93 ; 1990, *Les sciences exactes dans l'antiquité*, p. 125. L'auteur a introduit une notation des quantièmes égyptiens à l'aide du « surlignement », $\overline{7}$ en lieu et place de 1/7, notation qui a été adoptée par de nombreux historiens des mathématiques. Par commodité d'écriture, nous préférons traduire par un accent, ainsi 7', nous rapprochant alors des notations grecques ou même du point égyptien en écriture hiératique pour exprimer les quantièmes.

qu'à multiplier 1/7 par cette dernière expression ! Cette fois, point de mauvaise traduction « *thus we have to multiply* $\overline{7}$ *by* $1\ \ \overline{2}\ \ \overline{6}$ [26]». Il est sûr qu'il est conscient que « *le lecteur trouvera peut-être notre explication excessivement compliquée et hypothétique* [27]» mais nous devons constater qu'il a ainsi ramené la division de 2 par 7 à la multiplication de 1/7 par 1 1/2 1/6, opération qui n'est pas simple sauf, comme il l'indique, à introduire diverses complications. Inutile de dire que cette manière de procéder n'est pas conforme à une quelconque procédure suivie par un scribe égyptien[28].

Les explications fournies par Gillings sont tout autant « compliquées et hypothétiques ». Il mélange *auxiliaires numériques* et obtention de l'expression particulière du double du quantième 1/7 : « *the red 3 beneath the* $\overline{7}$ *means take 3 as a multiplier of 7, to give the reference number 21. The scribe then multiplied the 2 (of line3) by his multiplier to give 6 which he then partitioned as 3 1/2 , 1 1/2 and 1, each of which divides the reference number 21 in integers, and wrote them in red* [29]». Bien entendu, ayant supposé le partage de 6 en les *auxiliaires numériques* cherchés, il est heureux qu'il finisse par les retrouver et avec eux l'expression qui leur est associée ! Il finit par reconnaître « *we have no way of telling how the scribe came to choose 3 as his multiplier and, consequently, 21 as his reference number* [30]». Comme Neugebauer qu'il cite, il a mis la charrue avant les bœufs.

S. Couchoud suit une voie semblable. Certes elle vient d'expliquer le principe de l'utilisation des *auxiliaires numériques* avec les *exemples* R32 et R34 et elle croit utile d'ajouter ce qu'il en est pour le deuxième exercice de l'*Ostracon 153*. Mais, comme Gillings, elle considère le partage de 6 : « *on a donc choisi dans ce cas 21 pour nombre de référence. 1/7 correspond donc à 3 et son double, 6, est alors partagé en 3 1/2 + 1 1/2 + 1 qui donnent pour chacun un chiffre entier si on les divise par le chiffre de référence 21. En effet, 3 1/2 est le 1/6 de 21, 1 1/2 est les 1/14 de 21 et 1 est le 1/21 de 21. On peut donc écrire pour le double de 1/7, les fractions unitaires suivantes : 1/6 1/14 1/21 qui sont le résultat de la division de 2 par 7* [31]». Autrement dit, emportée par les dires de Gillings, elle s'est enfoncée dans un chemin non praticable.

Clagett situe ses réflexions dans le cadre des préceptes mis en avant par Gillings lors de l'obtention des expressions de 2 à partir d'un entier. Il donne alors l'exemple de l'*Ostracon 153* afin de montrer qu'il en existe qui ne sont pas satisfaits. Après avoir cité abondamment Gillings, il finit par conclure « *the author might have obtained his division (de 2 par 7) in some other way and then supplied the red auxiliaries as an easy check to the procedure. ... . It is also obvious that if the author had halved the product of* $4\ \times 1/7 =$ *1/2 1/4, he would have found the answer 1/4 1/28 that appeared in the Table of Two for the division of 2 by 7* [32]». Effectivement, nous avons montré que l'expression 1/6 1/14 1/21 pouvait être obtenue par un scribe égyptien. Mais, par ailleurs, Clagett n'a pas relevé les raisonnements erronés de Gillings.

Quant à A. Imhausen, elle donne une explication nouvelle « *Since no checkmarks nor a result of the calculation are preserved, it could be read as the multiplication of 4, 5, 6 or 7 times*

[26] Neugebauer, 1969 (1990), *The exact sciences in antiquity*, p. 93.
[27] Neugebauer, 1969, *The exact sciences in antiquity*, p. 93 ; 1990, *Les sciences exactes dans l'antiquité*, p. 126.
[28] Neugebauer, 1969, *The exact sciences in antiquity*, p. 93 ; 1990, *Les sciences exactes dans l'antiquité*, p. 126.
[29] Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 87.
[30] Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 88.
[31] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 32.
[32] Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book, vol 3*, p. 103.

7 or simply as the beginning of a multiplication table for 7 [33]». Mais, comme nous l'avons remarqué, le scribe attribue des *auxiliaires numériques* à **tous** les nombres de la deuxième colonne de telle sorte qu'il faut aussi additionner **tous** les nombres de la première colonne et que l'ensemble correspond à la seule multiplication de 1/7 par 7. Il est encore moins question d'une table de multiplication par 7. La référence à la pagination de l'ouvrage de David Fowler, *Mathematics of Plato's Academy*, où l'auteur donne une liste de nombreuses tables de multiplications est aussi erronée.

En guise de conclusion

Il ne semble pas que nous devions retenir les hypothèses formulées par nos prédécesseurs. Nous en avons suffisamment souligné les failles. En revanche, nous pouvons affirmer que la multiplication immédiate de 1/7 par 7 dont le résultat est évident, s'est transformée en une suite d'opérations, justification de l'expression 1/6 1/14 1/21 correspondant au *doublement* de 1/7, réduction du *doublement* de cette expression et enfin totalisation de tous les résultats obtenus par le moyen de la procédure des *auxiliaires numériques*, opérations qui doivent être situées dans le cadre de l'enseignement. De l'art de compliquer les choses afin de mieux maîtriser l'Art égyptien des calculs ! Ceci ressemble fort aux *exemples* R7, R8, R13, R14 et R15 du *Papyrus Rhind* où il s'agit de multiplier par 1 1/2 1/4, c'est-à-dire, 7/4, diverses expressions numériques, 1/7, 1/14, 1/28, 1/4 1/28, 1/16 1/112 et 1/32 1/224 que nous écririons aujourd'hui sous la forme du produit de 1/7 ou de 2/7 par un quantième binaire de telle sorte que le résultat est immédiat. Ainsi, par exemple, en R13, le multiplicande est égal à 1/16 1/32 et, en termes fractionnaires d'aujourd'hui, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{112}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{2}{7}\times\frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}.$$

d'où

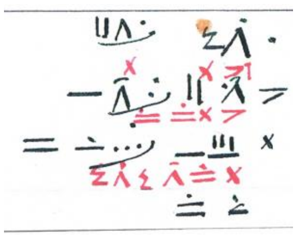
$$\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{112}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{4}\times\frac{7}{4}=\frac{1}{(4:2)\times 4}=\frac{1}{8}.$$

L'auteur de l'*Ostracon 153* donne une présentation semblable à celle écrite par Âhmès comprenant l'utilisation des *auxiliaires numériques* avec toutefois comme *référent commun* 1/28, ce qui souligne que ces exercices ont été fabriqués, comme celui de l'*Ostracon 153*, à partir de l'expression « classique » du double du quantième 1/7 :

$$\frac{1}{7}\times 2=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}.$$

Voici ce qu'il en est pour l'*exemple* R13

R13



1	1/16	1/112
	1 1/2 1/4	**1/4**
1/2	1/32	1/224
	1/2 1/4 1/8	**1/8**
1/4	1/64	1/448
	1/4 1/8 1/16	**1/16**
Total	1/8	

[33] Imhausen, 2016, *Mathematics in Ancient Egypt. A Contextual History*, p. 131.

Le premier exercice

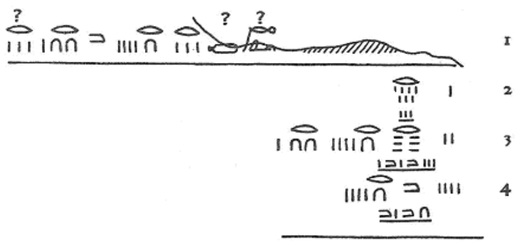
Nous avons pu commenter et mettre en avant les principales parties du deuxième exercice de l'*Ostracon 153*. Comme nous l'avons indiqué en introduction, c'est plus difficile et même impossible pour le premier. Devons-nous parler d'un exercice qui nous serait parvenu incomplet ou simplement de quelques observations sans objectif de résolution d'un problème ou encore de complément au deuxième problème ? Il est vrai que les commentaires sont rares et, pour tout dire, à notre connaissance, limités à celui écrit par Hayes. Seule, S. Couchoud en donne la transcription [34]:

méh (chézèp) [mH (Szp)] 1/3 1/14 1/2 1/21 (1/3).

Elle semble reprendre la traduction donnée par Hayes [35]:

« … *cubit, palm* (?) $\frac{1}{3}\quad\frac{1}{14}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{21}\ \frac{1}{3}$ (?) ».

Les points d'interrogation reflètent bien une réelle incertitude et nous pouvons être tentés de suivre les doutes exprimés par Otto Neugebauer : « *La reconstruction du problème original proposée par Hayes me semble très discutable. On ne peut lire avec certitude sur la première ligne que 1/3 1/14 1/2 1/21 et je ne vois aucune raison pour interpoler « coudée, palme (?) au début. Les quatre fractions forment évidemment deux paires, mais je ne perçois pas leur rapport aux calculs qui suivent* [36]». Quant à Clagett, il évite toute discussion « *I have not discussed them here since they seem to have no relation to the succeeding computation* [37]». Enfin, tout en renvoyant, en note, à la publication de Hayes, A. Imhausen déclare « *the first line of the ostracon is too fragmentary to be reconstructed* [38]». Qu'en est-il exactement ?



Transcription hiéroglyphique de droite à gauche conformément au texte hiératique

Nous avons déjà mis en avant la disposition particulière des deux textes. Le premier se résume à une seule ligne dont les extrémités sont effacées. Curieusement elle démarre à la hauteur de la fin du deuxième exercice et les premiers signes dépassent la ligne de séparation alors que le scribe semble disposer d'assez de place. Toutefois, la transcription hiéroglyphique effectuée par Hayes montre que le bord de la « page d'écriture » est moins important que la reproduction photographique le laisse voir. Nous avons affaire à un morceau de pierre, certainement du calcaire, dont la surface est très irrégulière et avec un grain assez grossier. On peut aussi penser que les traits horizontaux ont été tracés après l'écriture du texte afin de bien délimiter celui relatif au deuxième exercice afin d'en souligner son importance.

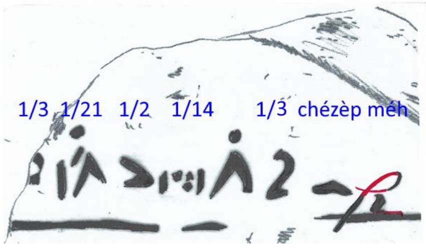
[34] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 33 = 1983, *Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique*, p. 39.

[35] Hayes, 1942, *Ostraka and name stones from the tomb of Sen-Mūt*, p. 29.

[36] Neugebauer, 1969, *The exact sciences in antiquity*, p. 92 ; 1990, *Les sciences exactes dans l'antiquité*, p. 125.

[37] Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book, vol 3*, p. 103.

[38] Imhausen, 2016, *Mathematics in Ancient Egypt. A Contextual History*, p. 131.



Entre l'option maximale professée par Hayes et la lecture minimale de Neugebauer que devons-nous choisir ? Avant tout, nous devons faire preuve d'humilité. Les compétences philologiques de Hayes sont unanimement reconnues : il est considéré comme étant un des plus brillants égyptologues de son époque. En particulier, son ouvrage *The Scepter of Egypt, a Background for the study of the Egyptian Antiquities in the Metropolitan Museum of Art* paru en deux tomes en 1953 et 1959, bien que basé sur les collections du Musée de New York, est une histoire de l'Égypte ancienne qui fait autorité. Autrement dit, nous ne devons pas balayer trop rapidement son interprétation d'un revers de main. Essayons de voir ce qui peut la justifier. Il semble bien que pour *méh* (mH) qui désigne la coudée il y ait deux signes. Tout d'abord, la marque du fouet dont il existe deux traces : en haut à droite une partie de la boucle et vers le bas à gauche chevauchant le trait horizontal la queue. Ensuite, nous pouvons voir le signe du bras, du moins l'extrémité gauche tandis que le reste se confond avec le trait. Enfin l'écriture du signe tracé après par le scribe, peut être retenue comme étant celle du terme *chèzèp* (Szp) qui désigne une paume, sous-multiple de la coudée. Quant à la marque que nous lisons à la fin de la ligne elle peut signifier le quantième 1/3 que nous lisons aussi au début des expressions numériques. Par conséquent, avec une grande prudence, nous pouvons proposer les transcriptions et traduction suivantes :

(mH, Szp ?) 1/3 1/14 1/2 1/21 (1/3 ?)
(méh, chézèp ?) 1/3 1/14 1/2 1/21 (1/3 ?)
(coudée, paume ?) 1/3 1/14 1/2 1/21 (1/3 ?)

Mais nous connaissons l'importance du contexte qui permet d'assurer transcription puis traduction. Ici, il se peut que Hayes se soit délibérément situé dans un cadre métrologique afin d'assurer sa traduction. Nous devons examiner plus en détail son commentaire [39]:

ANALYSIS:

I (line 1). Problem: convert into cubits $\frac{1}{3}$ palm (?).[169]
First step: $\frac{1}{14}$ (cubit) = $\frac{1}{2}$ (palm)
Second step: $\frac{1}{21}$ (cubit) (answer) = $\frac{1}{3}$ (palm)

[169] A search through the extant mathematical papyri and ostraka has failed to discover an exact parallel to this problem. The general arrangement and the methods used in the various steps, however, are common enough. See, for example, Chace, Bull, and Manning, *Rhind Mathematical Papyrus.*

Hayes pense qu'il s'agit de convertir 1/3 de paume en fraction de coudée d'où, sans doute, sa supposition de transcription hiéroglyphique et la traduction associée pour les « premiers termes » de ce texte. Il souligne qu'il n'a pas trouvé d'exemple de cette sorte dans les documents « mathématiques » qu'il connaît mais que, d'après lui, il existe un parallèle algorithmique avec certains problèmes traités par les scribes égyptiens, en particulier ceux du *Papyrus Rhind*. Un examen un peu attentif du problème R66, par exemple, lui aurait montré que sa reconstruction pouvait aller à l'encontre de la présentation de certaines conversions : « *tu feras 1/3 de paume en coudée* » serait rendu par « *ir.khér.èk chézèp 1/3 èn méh* (jr.xr.k Szp 1/3 n mH) », le nombre 1/3 étant situé après le terme désignant la paume (*chézèp*) et précédant celui indiquant la coudée (*méh*) sans oublier la préposition *èn*. Mais sa lecture sous la forme

[39] Hayes, 1942, *Ostraka and name stones from the tomb of Sen-Mūt*, p. 29.

méh chézèp 1/3 (mH Szp 1/3) soit « *(en termes de) coudée, 1/3 (de) paume* » peut aussi être considérée comme étant correcte. En effet, « *les textes égyptiens présentent les termes selon l'ordre apparent, produit, mesure, nombre (bière, cruches, 8)* [40]». Par ailleurs, l'écriture « mathématique » sur un ostracon peut exclure toute phraséologie. Compte tenu de la proximité de l'*Ostracon 153* avec d'autres ostraca faisant intervenir des relevés architecturaux et d'une écriture pouvant être interprétée comme étant un hiéroglyphe cursif du signe de la paume, nous pourrions tout de même retenir la transcription choisie par Hayes.

Une fois lancé dans la métrologie, Hayes ne s'arrête plus. Il pense donc que l'exercice proposé est celui de l'expression, en coudées, d'un tiers de paume. Il semble qu'il soit obsédé par la présence, dans le deuxième problème, du quantième 1/21 dont il ne s'explique pas l'origine. Nous avons vu qu'il n'est pas le seul ! Par exemple, S. Couchoud finit par conclure « *ceci expliquerait, après coup, le choix de 21 comme chiffre de référence, étant donné qu'une coudée équivaut à 7 palmes* [41]». Mais, nous avons pu montrer que, sans aucun doute, ce choix résultait de considérations arithmétiques et non pas métrologiques.

Or, puisqu'une coudée (royale) vaut 7 paumes, un scribe égyptien aurait vite fait d'en déduire qu'un tiers de paume vaut un vingt-et-unième de coudée. En effet, il suffit d'effectuer le produit de deux quantièmes, à savoir, puisqu'une paume vaut 1/7 de coudée, celui de 1/7 par 1/3 :

$$\frac{1}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7 \times 3} = \frac{1}{21}.$$

Par conséquent, point besoin des autres quantièmes 1/14, 1/2 et peut-être 1/3. Autrement dit, la première étape considérée par Hayes est sans objet, ce qui, en un certain sens, ruine son interprétation. Nous devons donc examiner plus en détail la suite des nombres 1/3, 1/14, 1/2 et 1/21 avec l'ajout éventuel de 1/3.

Contrairement à une expression numérique traditionnelle les quantièmes ne sont pas rangés dans l'ordre strictement décroissant qui consisterait à écrire 1/2 1/3 1/14 1/21, nombre auquel il est difficile d'attribuer une certaine signification. Toutefois, il se peut que le désordre que nous venons de mettre en évidence soit volontaire et qu'il soit la trace d'une pratique qui peut nous échapper. En effet, dans le *Rouleau de cuir*, texte donnant diverses relations[42], nous trouvons, en particulier, celles auxquelles correspondent les égalités « désordonnées »

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{15} + \frac{1}{75} + \frac{1}{200} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \frac{1}{50} + \frac{1}{30} + \frac{1}{150} + \frac{1}{400} = \frac{1}{16},$$

dont nous pouvons penser que leurs expressions proviennent de la conduite particulière des calculs. Dans le cas de l'*Ostracon 153*, nous sommes bien en peine de fournir une quelconque explication.

Comme le suggère Neugebauer, nous sommes alors amenés à considérer les deux couples de nombres (1/3, 1/14) et (1/2, 1/21). En bon arithméticien, il s'est sans doute aperçu qu'il était difficile de trouver un lien de proportionnalité entre eux puisque

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \quad \text{mais} \quad \frac{1}{14} > \frac{1}{21}.$$

En revanche, si nous considérons les couples (1/2, 1/14) et (1/3, 1/21) nous nous retrouvons dans une situation semblable à celle suggérée par Hayes en ce sens que, dans chaque

[40] Grandet, Mathieu, 2003, *Cours d'Égyptien Hiéroglyphique*, §21.2, p. 231.

[41] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 33 = 1983, *Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique*, p. 39.

[42] Voir sur notre site l'annexe DC : Rouleau de cuir.

couple, le deuxième terme est le septième du premier. Il se peut donc que l'élève ait confondu les signes numériques hiératiques auxquels correspondent nos 1/2 et 1/3, l'introduction du septième étant comme nous l'avons vu dans le deuxième exercice un point de passage essentiel. Autrement dit, si cette hypothèse était retenue, nous pourrions avoir des marques relatives à la multiplication de 1/7 par 1/2 1/3. Nous pourrions aussi avoir des indications des multiplications-inversions que nous avons signalées pour l'obtention de l'expression 1/6 1/14 1/28 du double du quantième 1/7 semblables à l'écriture « compressée »

$$q \qquad 1/nq \qquad 1/q,$$

que nous trouvons souvent dans les *expressions des doubles des quantièmes* où le scribe effectue la division de 2 par l'entier n et le quantième $1/q$ figure dans le *manque*. En fait, cette dernière hypothèse peut être mise en regard des expressions particulières de 2 à partir de 7 que nous pourrions écrire comme suit selon les premières lignes que nous trouvons dans le *Papyrus Rhind* :

7   1/6   1 1/6 | 1/14   1/2   1/21   1/3 |

avec

$$\frac{1}{7}\times 2 = \frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21} \quad , \quad 2 = 1+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},$$

$$7\times\frac{1}{6} = 7:6 = 1+\frac{1}{6} \quad , \quad 7\times 2 = 14 \quad , \quad 7\times 3 = 21\,.$$

Dans le cadre, nous retrouverions les nombres écrits, dans l'ordre, par le scribe. Mais cette supposition laisse dans l'ombre le premier 1/3 et, en revanche, retient le dernier 1/3.

Conclusion

Concernant le premier « exercice », nous n'avons pu qu'émettre différentes suppositions qui ne nous satisfont pas totalement tant du point de vue de sa transcription que de sa traduction et bien sûr de sa signification. Aussi, notre conclusion concerne principalement le second exercice.

L'examen des diverses hypothèses que nous venons de conduire montre que nos opinions diffèrent fortement de celles émises par nos prédécesseurs. S'il fallait les résumer rapidement, nous pourrions dire que, même si, parfois, ils ont cru saisir les divers ressorts de l'arithmétique égyptienne, ils n'ont pas su les mettre en application. C'est déjà sensible pour Hayes qui, semble-t-il, a eu seulement une formation littéraire et artistique, le conduisant à privilégier la métrologie aux dépens de l'arithmétique. Au contraire, Neugebauer a eu une bonne formation mathématique[43] dont nous avons la preuve dans la division qu'il a produite mais qui ne doit pas être considérée ou effectuée de cette manière. Gillings s'est perdu dans la considération des *auxiliaires numériques* et de l'expression du double du quantième 1/7. Il a entraîné dans sa chute S. Couchoud. Quant à Clagett, il s'est borné à reprendre les dires de Neugebauer et Gillings sans en discerner les failles. Enfin, A. Imhausen a fourni une réflexion originale mais elle n'a pas pris en compte la totalité des nombres à additionner.

[43] Après des études de mathématiques à Göttingen, sa connaissance de l'égyptien l'a conduit à répondre à la demande d'une critique de l'édition du *Papyrus Rhind* par Peet et à s'engager vers de très savantes recherches en histoire des mathématiques et de l'astronomie : les mathématiciens Richard Courant et David Hilbert l'ont encouragé pour qu'il soutienne, en 1926, sa thèse sur les fractions égyptiennes. Il a aussi bénéficié de l'aide de l'égyptologue Kurt Sethe. Voir, par exemple,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Neugebauer.html.

Autrement dit, malgré l'abondance des commentaires, nos prédécesseurs n'ont pas pu mettre en évidence le fait que le deuxième exercice de l'Ostacon 153 est un bon exemple d'enseignement de l'Art égyptien du calcul. En montrant une manière d'effectuer la division de 1/7 par 7 dont le résultat est évident, il permet à l'élève de réfléchir à diverses pratiques dont nous avons pu préciser certaines étapes. Tout d'abord, il faut justifier l'expression 1/6 1/14 1/21 correspondant au *doublement* de 1/7. Celle-ci peut être obtenue facilement en divisant 2 par 7 à l'aide des multiplicateurs ternaires. Ainsi l'élève peut prendre conscience de la multiplicité des expressions d'un même nombre et de la nécessité d'essayer d'établir celle qui est la plus appropriée. Sans faire référence à l'élève, Neugebauer reflète une opinion semblable lorsqu'il écrit : « *En d'autres termes, on ne peut pas dire qu'un système de tables de fractions a été calculé une fois pour toutes et s'est ensuite maintenu inchangé. Il est évident que plusieurs formes équivalentes ont été développées petit à petit, mais sans jamais transgresser la méthode originale pour l'essentiel. Ce dernier trait est historiquement de la plus haute importance. La pratique des fractions est toujours restée, dans l'arithmétique égyptienne un art particulier* [44]». Un examen un peu attentif d'autres expressions relevées dans des textes bien postérieurs montre que le cadre dans lequel elles sont exposées s'éloigne peu à peu de cet art arithmétique où les règles sont peu présentes pour rejoindre des domaines plus algorithmiques avec un moindre recours au chiffre deux-tiers. Il nous suffit, par exemple, de considérer diverses tables de dixièmes, telles celles figurant dans le *Papyrus Rhind*, le *Papyrus Michigan 621*[45] d'époque grecque, le *Papyrus d'Akhmîm*[46] écrit en grec vers le VIII^e^ siècle de notre ère ou encore un manuel copte[47] :

N	Rhind	Michigan 621	Akhmîm	Copte (f. 7v)
1	1/10	1/10	1/10	1/10
2	1/5	1/5	1/5	1/5
3	1/5 1/10	1/5 1/10	1/4 1/20	1/4 1/20
4	1/3 1/15	1/3 1/15	1/3 1/15	1/3 1/15
5	1/2	1/2	1/2	1/2
6	1/2 1/10	1/2 1/10	1/2 1/10	1/2 1/10
7	2/3 1/30	1/2 1/5	1/2 1/5	2/3 1/30
8	2/3 1/10 1/30	2/3 1/10 1/30	1/2 1/4 1/20	1/2 1/4 1/20
9	2/3 1/5 1/30	1/2 1/3 1/15	1/2 1/3 1/15	1/2 1/3 1/15

Ces différences ne semblent pas devoir être retenues pour l'expression du double de 1/7 qui, par ailleurs, a été toujours écrite sous la forme classique.

Il a fallu ensuite doubler l'expression particulière 1/6 1/14 1/21 pour retrouver le doublement « classique » 1/2 1/14, ce qui est loin d'être évident et nécessite la connaissance de diverses relations. Enfin, pour la totalisation, l'élève a dû employer la technique des *auxiliaires numériques*. Autrement dit, le deuxième exercice donne lieu à un très bon problème à résoudre. Nous avons peu de documents relatifs à l'enseignement des mathématiques pour qu'il reste ignoré.

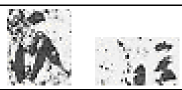
[44] Neugebauer, 1969, *The exact sciences in antiquity*, p. 78 ; 1990, *Les sciences exactes dans l'antiquité*, p. 109.

[45] Voir Knorr, 1982, Techniques of fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 145. Knorr donne la référence 146 mais on trouve le numéro 621 sur le site de la Collection de l'Université Michigan : http://www.lib.umich.edu/pap.

[46] Baillet, 1892, *Le Papyrus mathématique d'Akhmîm*, p. 28.

[47] Voir Drescher, 1948, A coptic calculation manual, pl. II. Voir aussi Fowler, 1987, *The Mathematics of Plato's Academy*, pp. 271-276.

ANNEXE : Les chiffres et nombres dans l'*Ostracon 153*

	Hayes	Transcription
1		
1		
2		
3		
4		
4		
6		
7		
10		
20		
1/2		
1/3		
1/6		
1/7		
1/14		
1/21		

Certains nombres sont effacés, voir, par exemple, le deuxième 1/21. Nous l'avons complété en vert.

Bibliographie

BAILLET Jean, 1892, Le Papyrus mathématique d'Akhmîm, *Mémoires publiés par les membres de la Mission Archéologique Française au Caire*, t. 9, fasc. 1, Paris, Ernest Leroux, 1892.

CLAGETT Marshall, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book*, Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics, Philadelphie, American Philosophical Society, 1999, pp. 102-103.

COLLIER Mark, QUIRK Stephen, 2004, *The UCL Lahun Papyri : Religious, Literary, Legal, Mathematical and Medical*, Oxford, BAR International Series 1209, 2004.

COUCHOUD Sylvia, 1983, *Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique*, Thèse de Doctorat de Troisième cycle, Lyon, Université Lyon II, 1983, pp. 37-40.

COUCHOUD Sylvia, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique, Paris, Éditions Le Léopard d'or, 1993, pp. 32-33.

DARESSY Georges, 1906, Calculs égyptiens du Moyen Empire, *Recueil de travaux relatifs à l'archéologie égyptienne et assyrienne* 28 (1906) 62-72.

DRESCHER James, 1948, A Coptic Calculation Manual, *Bulletin de la Société d'Archéologie Copte* 13 (1948/9) 137-160 + 4 pl. .

FOWLER David, 1987, *The mathematics of Plato's Academy, a new reconstruction*, Oxford, Clarendon Press, 1987.

FRANKFORT, Henri, DE BUCK Adriaan, GUNN Battiscombe, 1933, *The Cenotaph of Seti I at Abydos*, Londres, The Egypt Exploration Society, 1933

GILLINGS Richard, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, Cambridge, The Massachusetts Institute of Technology, 1972 ; réimp., New York, Dover, 1982.

GILLINGS Richard, 1978, The mathematics of Ancient Egypt *in* Gillispie, 1978, *Dictionary of Scientific Biography*, vol. XV, Supplement I, Topical Essays, p. 690.

GILLISPIE Charles Coulston (éd.), 1978, *Dictionary of Scientific Biography*, vol. XV, Supplement I, Topical Essays, New York, Scribner's Sons, 1978.

GRANDET Pierre, MATHIEU Bernard, 2003, *Cours d'Égyptien Hiéroglyphique*, Nouvelle édition revue et augmentée, Paris, Éditions Khéops, 2003.

GUNN Battiscombe, 1926$_2$, An architect's diagram of the third dynasty, *Annales du Service des Antiquités de l'Égypte* 26 (1926) 197-202.

HAYES William, 1942, *Ostraka and name stones from the tomb of Sen-Mūt (n° 71) at Thebes*, New York, The Metropolitan Museum of Art, The Egyptian Expedition XV, 1942.

IMHAUSEN Annette, 2003$_1$, Ägyptische Algorithmen. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathematischen Aufgabentexte, Wiesbaden, Harrassowitz Verlag, 2003, p. 9.

IMHAUSEN Annette, 2016, *Mathematics in Ancient Egypt. A Contextual History*, Princeton, Princeton University Press, 2016, pp.131-132.

IMHAUSEN Annette, James RITTER, 2004, Mathematical Fragments : UC 32114B, UC 32118B, UC 32134A+B, UC 32159-UC 32162, *in* Collier, Quirk, 2004, *The UCL Lahun Papyri*, pp.71-96.

KNORR Wilbur, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, *Historia Mathematica* 9 (1982) 133-171.

LÉONARD DE PISE (FIBONACCI), 1202 (1857), *Liber Abbaci*, éd. Baldassarre Boncompagni, *Scritti di Leonardo Pisano*, matematico del secolo decimoterzo, vol I, *Il Liber*

Abbaci di Leonardo Pisano, publicato secondo la lezione del codice Magliabechiano C. I, 2016, Badia Fiorentina, n° 73, Rome, Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1857.

LOPEZ Jesus, 1980, Ostraca Ieratici N. 57093-57319 : Catalogo del Museo Egizio di Torino, Serie seconda – Collezioni, vol. III, Fasciolo 2, Mailand, Istituto Editoriale Cisalpino – La Goliardica, 1980.

MICHEL Marianne, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, Numération, métrologie, arithmétique, géométrie et autres problèmes, Bruxelles, Éditions Safran, 2014.

NEUGEBAUER Otto, 1925, *The Rhind Mathematical Papyrus* von E. Peet, *The mathematik Tidskrift*, A, (1925) 66-70.

NEUGEBAUER Otto, 1926, *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung*, Berlin, Springer, 1926, 45 pp. + 6 pl. .

NEUGEBAUER Otto, 1934, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, Erster Band, Vorgriechische Mathematik, Berlin, Springer, 1934.

NEUGEBAUER Otto, 1969 (1990), *The exact sciences in antiquity*, 1^re^ éd. 1951, 2^e^ éd. 1957, 3^e^ éd. New York, Dover, 1969, pp. 92-94 ; trad. P.Souffrin, *Les sciences exactes dans l'antiquité*, Arles, Actes Sud, 1990.

VANDERSLEYEN Claude, 1995, *L'Égypte et la vallée du Nil*, t. 2, *De la fin de l'Ancien Empire à la fin du Nouvel Empire*, Paris, Presses Universitaires de France, 1995.

WOLFF G., Ägyptische Mathematik in Kunst und Handwerk, *Die Deutsche Höhere Schule*, Heft 13/16 (1941) 163-168.