QUATRE PROBLÈMES DE DIMENSIONS

INTRODUCTION

Le *Papyrus de Moscou* et le *Fragment UC 32162 d'El-Lahoun* nous permettent de considérer quatre témoignages de calculs de dimensions, plus exactement, de dimensions de surfaces rectangulaires ou triangulaires connaissant la mesure de leurs aires et le quotient de leurs dimensions, longueur et largeur dans le cas des rectangles et côtés de l'angle droit puisqu'il s'agit, sans doute, de triangles rectangles. Ce sont les problèmes M6, M7 et M17 du *Papyrus de Moscou* et la deuxième partie de l'exercice UC 32162-1 d'*El-Lahoun*. On trouve des problèmes semblables dans les papyrus démotiques. Nous les examinerons à part.

À la suite de Wasili Struve, le premier éditeur du *Papyrus de Moscou*[1], Annette Imhausen[2] range ces exercices sous la forme jdb-*Berechnung* (compte-*idèb*), empruntant ainsi le terme *idéb* (jdb) qui figure dans le seul problème M7 du *Papyrus de Moscou*. Pour notre part, nous avons préféré insister sur le but des problèmes présentés. Connaissant la mesure de la superficie des rectangles ou des triangles ainsi que leur *idéb* (jdb), il est demandé de déterminer leurs dimensions principales. En fait, comme pour le *séqèd* (sqd) qui caractérise la forme des pyramides, plus précisément, leur pente, nous pensons que la valeur numérique du terme *idéb* (jdb) détermine la forme des rectangles et des triangles rectangles. En effet, ce nombre est, pour les rectangles, un des quotients des côtés et, pour les triangles rectangles, un des quotients des côtés de l'angle droit, ce qui peut justifier l'appellation que nous lui donnons, *quotient-de-proportion*. Les quatre problèmes que nous considérons donnent à voir, sans doute, deux types de procédures. Nous pensons qu'elles sont mises en œuvre en fonction de la valeur de ce quotient selon qu'il est inférieur ou supérieur à 1. Toutefois, les résolutions utilisent les mêmes « ingrédients », en particulier, l'inverse du *quotient-de-proportion* ce qui, *a priori*, à nos yeux d'aujourd'hui, peut sembler être inutile.

Habituellement, dans la pratique, on détermine la superficie de ces polygones à partir des mesures des dimensions, produit de la longueur par la largeur dans le cas d'un rectangle, demi-produit de la base par la hauteur pour un triangle. Ici, il s'agit d'un problème inverse, marque d'une activité mathématique certaine renforcée par des extractions de racines carrées et, comme nous venons de l'indiquer, l'utilisation de l'inverse du *quotient-de-proportion* pour lequel nous devons nous interroger sur la pertinence pratique de son introduction.

Dans le *Papyrus Rhind*[3], le plus important document mathématique qui nous soit parvenu de l'Égypte ancienne, nous ne trouvons pas d'exemples d'extractions de racines carrées. En revanche, outre le *Papyrus de Moscou* et les *Fragments d'El-Lahoun*, nous pouvons en lire dans les *Fragments 6619 de Berlin* et, plus tard, dans les *papyrus démotiques*[4]. Nous pouvons aisément nous convaincre de la nécessité de ces extractions si nous situons les problèmes que nous considérons dans un cadre algébrique. Ils reviennent alors à chercher deux nombres entiers x et y dont on connaît leur produit P et leur quotient Q, autrement dit, à résoudre dans la structure numérique égyptienne, le système

[1] Struve, 1930 (1977), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, pp. 123-134.

[2] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, pp. 79-80, 83-84.

[3] Voir notre site papyrusrhind.unblog.fr.

[4] Voir, par exemple, Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 212-238. Nous les commenterons ultérieurement.

$$x \times y = P \quad \text{et} \quad x : y = Q\,,$$

où P est un nombre entier et Q un nombre fractionnaire, à savoir, 1/2 1/4, 2 1/2 ou encore 1/3 1/15. Aujourd'hui, nous écririons successivement

$$x = Qy \quad , \quad P = (Qy)y = Qy^2 \quad , \quad y^2 = P : Q \quad , \quad y = \sqrt{P : Q} \quad , \quad x = Q\sqrt{P : Q}\,.$$

L'expression des résultats montre l'introduction des racines carrées qui, dans les problèmes que nous examinons, sont exactes et entières. Par conséquent, ces exercices ont, sans aucun doute, été fabriqués à partir de leur solution. Par exemple, en M17, Q est égal à 1/3 1/15, soit 2/5 (voir les *expressions de 2 à partir de 5* dans le *Papyrus Rhind*[5]), alors les dimensions sont proportionnelles aux nombres 2 et 5 ce qui implique que leur produit P doit être le produit de 10 par le carré d'un entier naturel non nul. En l'occurrence, dans ce problème, il est égal à 4, carré du nombre 2 :

$$Q = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5} \;\;,\;\; P = 10n^2 = 10 \times 2^2 = 10 \times 4 = 40 \;\;,\;\; y = 5n = 10 \;\;,\;\; x = 2n = 4\,.$$

En fait, aujourd'hui, en mettant sous la forme d'une fraction réduite a/b le *quotient-de-proportion Q*

$$Q = \frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}\,,$$

les rectangles dont les mesures des côtés sont respectivement les mêmes multiples ka et kb de a et b possèdent ce *quotient-de-proportion*. Il suffit alors de faire le produit de ces multiples pour en déduire la mesure de la superficie. Certes les scribes égyptiens ne considéraient pas les fractions générales mais leurs pratiques montrent qu'ils pouvaient utiliser un palliatif qui pourrait, ici, s'exprimer sous la forme « a fois le quantième $1/b$ » pour notre fraction a/b d'aujourd'hui, d'où la mise en évidence des nombres entiers a et b.

Toutefois, les cadres dans lesquels se sont placés les scribes pour proposer les problèmes que nous examinons sont moins généraux. Ainsi, en M6 et dans le *Fragment UC 32162-1*, nous sommes dans un domaine géométrique. Il s'agit de déterminer les dimensions du rectangle ayant une superficie égale à 12 et dont la mesure de la largeur est 1/2 1/4, soit, 3/4, de celle de la longueur. Les mesures des dimensions sont immédiates, ce sont 3 et 4. Ce sont celles du rectangle « pythagoricien » (c'est-à-dire dont les mesures des côtés et de la diagonale sont des nombres entiers) primitif, celui dont les mesures des côtés de l'angle droit sont les plus petits nombres entiers, à savoir, 3 et 4 et celle de la diagonale est aussi entière, c'est 5. Il n'est donc pas exclu que des considérations géométriques aient prévalu dans l'heuristique des solutions que les scribes ont données.

En revanche, dans les problèmes M7 et M17, le *quotient-de-proportion* est plus arithmétique. En effet, il est lié aux expressions des doubles des quantièmes impairs, soit, en M17, le double de 1/5, c'est-à-dire, d'après les *expressions de 2 à partir de 5*, 1/3 1/15 et en M7, son inverse, 5/2, ou encore, 2 1/2. Ceci pourrait jouer en faveur de l'utilisation de l'inverse du *quotient-de-proportion* lorsque son expression est simple comme c'est le cas en

[5] Voir, les *expressions de 2 à partir d'un entier*, papyrusrhind.unblog.fr.

M7 où, toutefois, le scribe donne une procédure dans laquelle son introduction peut sembler être inutile.

Bien sûr, les scribes égyptiens ne suivent pas la procédure algébrique[6] que nous avons donnée en introduction. Par exemple, au lieu de remplacer dans le produit une dimension par son expression en fonction de l'autre, les scribes multiplient ce produit par le *quotient-de-proportion* ou son inverse ce qui obéit à d'autres préoccupations. Ainsi, avec les notations précédentes, nous pouvons écrire, algébriquement,

$$x = Qy \quad , \quad P = xy = (Qy)y = Qy^2 \quad , \quad y^2 = P : Q \, ,$$

différent, par exemple, de

$$P \times Q = (x \times y) \times (x : y) = x^2 \, .$$

Par conséquent, au lieu du cadre algébrique d'aujourd'hui, les scribes égyptiens doivent naviguer entre géométrie et arithmétique. Mais ils n'oublient pas pour autant la métrologie. Ainsi, le « quotient » des dimensions doit correspondre au quotient des mesures des dimensions des surfaces exprimées dans la *même unité de mesure de longueur*. Celle-ci étant plus ou moins implicitement déterminée, il faut alors la mettre en accord avec l'unité de superficie. Par exemple, en M7, l'unité de superficie est le *millier de terre* et celle de longueur semble être le *khèt*, par suite, le scribe est amené à multiplier par 10 la mesure de la superficie du triangle puisqu'un *millier de terre* vaut 10 *sétchat,* soit encore, 10 *khét* carrés. Il peut raisonner en *khèt* et *khèt* carrés[7].

Enfin, tout aussi important semble être le point de vue numérique. En effet, le *quotient-de-proportion* doit être entendu comme étant le *nombre-de-fois* que la mesure d'une dimension est multiple de celle de l'autre dimension. C'est cette acception qui semble irriguer les procédures utilisées.

[6] C'est pourtant la démarche que propose Kurt Vogel, affirmant même que les autres sont invraisemblables (*unwahrscheinlich*) ; Vogel, 1930, Der Moskauer mathematische Papyrus, p. 455.

[7] Voir, plus loin ou nos annexes métrologie (en préparation).

LES DOCUMENTS

Les deux documents que nous considérons datent du Moyen Empire. Ils ont été rédigés vers 1800 avant notre ère, soit à la même époque que le ou les écrits recopiés par le scribe Âhmès à qui nous devons le plus important témoignage connu à ce jour de l'activité mathématique de l'Égypte ancienne, le *Papyrus Rhind*. Toutefois, celui-ci ne comporte pas d'exemples du type que nous étudions.

Le *Fragment UC 32162 (K LV.4) d'El-Lahoun*

Nous considérerons tout d'abord le *Fragment UC 32162 (K LV.4) d'El-Lahoun*. Il fait partie des nombreux documents trouvés par Sir William Petrie lors des fouilles qu'il a effectuées près de la pyramide de Sésostris II à 3 kilomètres environ de la ville actuelle d'El-Lahoun située dans le Fayoum, à 90 kilomètres au Sud du Caire. Cette cité est diversement orthographiée : Kahun, Kahoun, Illahun ou encore Illahoun. Petrie rapporte que lorsqu'il découvrit la ville pour la première fois en 1887, il demanda à un vieil homme qu'il avait rencontré, comment elle s'appelait, et ce dernier lui répondit Kahun, d'où le nom qu'il retint et qui est indiqué dans les anciennes publications[8]. Outre les écrits mathématiques qui appartiennent sans doute à un même corpus, la découverte de cette importante documentation comporte des textes littéraires, légaux, médicaux et des recettes vétérinaires ainsi que des lettres et des comptes[9]. Ils font partie des collections de l'University College de Londres et sont conservés au Petrie Museum. Récemment une nouvelle publication a eu lieu[10]. Pour les fragments mathématiques, elle a été effectuée par A. Imhausen et James Ritter[11]. La codification a changé. Pour notre fragment, au K LV.4 a succédé le UC 32162 et, ici, nous considérerons le premier problème, d'où la référence UC 32162-1 que, comme A. Imhausen et Marianne Michel[12], nous lui attribuons.

Le *Fragment UC 32162* mesure 14 centimètres de haut sur 41 centimètres de large et est assez endommagé. Le verso est anépigraphe. Au recto, figure une introduction écrite verticalement en rouge, sans doute le début d'un rouleau de papyrus qui devait comporter plusieurs problèmes. Elle ressemble à celle que nous lisons dans le *Papyrus Rhind*. Le premier exercice, celui que nous considérons ici, est écrit en douze lignes. Il est presque complet, seules, les trois premières lignes manquent. Nous les restituons plus ou moins bien à partir de la solution qui, dans sa deuxième partie, donne lieu à la même procédure que nous lisons aux problèmes M6 et M17 du *Papyrus de Moscou*. Le second problème à la gauche de celui que nous traitons est relatif à des redevances ; il est semblable aux problèmes R67 du *Papyrus Rhind*, M11 et M23 du *Papyrus de Moscou*.

Dans UC 32162-1, le scribe écrit le plus souvent les nombres en rouge comme si l'auteur voulait insister sur leurs liaisons. Aujourd'hui, un lecteur qui ne connaît que les seuls signes numériques peut retrouver la procédure opératoire employée sans savoir précisément

8 Griffith, 1898, *The Petrie Papyri, Hieratic Papyri from Kahun and Gurob*.

9 Voir les commentaires de Gaston Maspero dans le *Journal des savants* des années 1897, 1898. Le brillant égyptologue ne parle pas du problème que nous considérons ici.

10 Collier, Quirk, 2004, The UCL Lahun Papyri : Religious, Literary, Legal, Mathematical and Medical.

11 Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments.

12 Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*.

déchiffrer l'écriture hiératique. Nous pouvons penser à la *tablette babylonienne UET 6.2 274*[13] qui ne comporte que des chiffres mais qui cache une résolution d'un problème un peu semblable. Dans le fragment égyptien, le style est stéréotypé : les instructions sont introduites par l'expression *ir.khér.èk* (jr.xr.k) que nous rendons par « tu feras » et le résultat par *khépérèt im pou* (xpr.t jm pw) soit « de là, c'est ce qu'il adviendra » et « il en résultera » pour l'adaptation, cette dernière formulation étant peu employée dans le *Papyrus Rhind*.

Il semble que l'on puisse découper le problème UC 32162-1 en deux parties. L'une est constituée par les quatre premières lignes dont trois sont très lacunaires ce qui a donné lieu, au cours du temps, à diverses interprétations, tandis que l'autre détaille les opérations pour finir par un résumé de la situation de telle sorte que Francis Llewellyn Griffith, le premier éditeur du texte, a pu dire « *I do not know how to complete this problem, nor what is meant by* hayt[14]» terme que nous lisons à la dernière ligne. Pour sa part, Gaston Maspero se contente d'affirmer « *je passe sur plusieurs fragments dont le sens est incertain* [15]» tandis que Moritz Cantor[16] écrit qu'il ne comprend pas le but de la totalité des calculs du problème. Il n'en demeure pas moins que Griffith ayant cru lire le terme *henu* (hnw), donc une unité de mesure de capacité, Hans Schack-Schackenburg[17] situait alors l'exercice dans un contexte métrologique, toutefois peu assuré, tout en donnant une traduction fort juste des autres lignes de l'exercice, introduisant tout de même, mais malencontreusement, la *Regula falsi* dans la résolution lorsqu'il reliait, fort justement, le UC 32162-1 au *Fragment 6619 de Berlin*. Richard Gillings[18] lui emboîtait le pas en donnant une autre interprétation. Mais c'est finalement Sylvia Couchoud[19] qui formulait une nouvelle hypothèse dénuée de toute considération métrologique, qui, depuis, a reçu l'assentiment des divers commentateurs. Bien sûr, nous la retenons. Il s'agit de partager une « bande » rectangulaire de 40 coudées de long et de 3 coudées de large, en 10 parties rectangulaires égales telles que leur largeur soit 1/2 1/4 de leur longueur. Après avoir calculé la superficie de la « bande » puis celle de chaque rectangle partiel, nous retrouvons le problème traité dans les autres exercices, en particulier le M6 du *Papyrus de Moscou*, à savoir, la détermination des dimensions d'un rectangle dont on connaît la mesure de la superficie et le « quotient » des mesures des côtés. Autrement dit, nous pouvons considérer que la première partie n'est qu'une introduction pour résoudre ce type de problème qui, aujourd'hui, sous forme algébrique, peut être traduit sous la forme de la résolution, dans la structure numérique égyptienne, du système

$$xy = 12 \quad \text{et} \quad y = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) x \,.$$

Le *Papyrus de Moscou*

Le *Papyrus de Moscou* a été édité par Vasily Struve[20] en 1930. Il a donné de nombreux renseignements concernant la découverte, la nature et la paléographie de ce

[13] Friberg, 2005, *unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics*, p.84.
[14] Griffith, 1897, *The Petrie Papyri, Hieratic Papyri from Kahun and Gurob*, p. 17.
[15] Maspero, 1897, The Petrie Papyri, p. 219.
[16] Cantor, 1898, Die mathematischen Papyrusfragmente von Kahun, p. 308 „*Wir verstehen den Zweck der ganzen Rechnung nicht*".
[17] Schack-Schackenburg, 1900, Der Berliner Papyrus 6619, pp.138-139.
[18] Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*.
[19] Couchoud, 1983-1993, *Mathématiques égyptiennes*.
[20] Struve, 1930 (1977), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*.

document. Récemment, M. Michel[21] en a repris les éléments essentiels. Nous nous bornerons ici à en donner quelques-uns.

Vladimir Golénischeff[22]

Le *Papyrus mathématique de Moscou* a été acheté par Vladimir Golenischeff dans les années 1892-1894. Il fait partie de la riche collection qu'il a acquise au cours de ses nombreux voyages en Égypte et qui a été vendue au Musée des Beaux-Arts de Moscou en 1912. Mais, dès 1894, Moritz Cantor[23] en faisait état dans son histoire des mathématiques. Élève de Golenischeff et conservateur des Antiquités égyptiennes du Musée de Moscou, Boris Turaeff pouvait donner une publication[24] concernant le problème M14 relatif à la détermination du volume d'une pyramide tronquée tout en étudiant d'autres exercices géométriques pour lesquels il avait effectué une transcription hiéroglyphique et une traduction, en particulier celle du M6 qu'il décrit en ces termes : « *the first* (de la classification adoptée) *shows how to define the length of the sides of a quadrilateral, when the relation of the sides and the area of the quadrilateral are known* [25]». Ceci fait l'objet d'une présentation à l'Académie que reprendra, en 1925, son collègue mathématicien Tsinserling[26]. Toutefois, si l'on en croit

---

21 Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*.

22 Sainte Fare Garnot, 1959, Un Témoignage sur Wladimir Golénischeff, BIFAO, 58 (1959) pl. I.

23 Cantor, 1894, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, p. 23, 1907, p. 59.

24 Turaev, 1917, The volume of the truncated pyramid in Egyptian mathematics.

25 Cité par Peet, 1923_1, *The Rhind Mathematical Papyrus British Museum 10057 and 10058*, p. 6.

26 Tsinserling, 1925, Geometriya u drevnikh egitpyan (Géométrie dans l'ancienne Égypte).

Raymond Clare Archibald, toujours bien documenté sur le sujet, ces publications ne sont pas exemptes de reproches : « *the transcription is incorrect, incomplete, and probably misprinted ; obviously a piece of unfinished work on the part of Turaev* [27]». Toutefois, les études menées par Turaeff lui permettent d'affirmer que le papyrus daterait approximativement de 1850 avant notre ère, soit à la même période qu'ont été rédigés le ou les documents consultés par le scribe Âhmès pour écrire le *Papyrus Rhind*. Peu avant la publication de son édition du *Papyrus Rhind*, en 1923, Eric Peet recevait les reproductions photographiques du *Papyrus de Moscou* ce qui lui permettait d'affirmer « *I will only add to this that though the papyrus of the highest interest owing to its early date and admirable state of preservation (in part at least) it contains nothing, with the exception of the problem of the truncated pyramid, which will greatly modify the conception of Egyptian mathematic given to us by the already published papyri and fragments* [28]». En ce qui concerne le M6, nous savons que le premier problème du *Fragment UC 32162 d'El-Lahoun* est de même nature. Aidé de son collègue Battiscombe Gunn, Peet n'en donnait pas moins une étude, justement, sur quatre problèmes géométriques du *Papyrus de Moscou*, à savoir, les M6, M7, M17 et M14, comportant la traduction commentée et la transcription hiéroglyphique[29]. En dehors de la bibliographie précitée d'Archibald, il ne semble pas que, lors de l'édition américaine du *Papyrus Rhind*, l'équipe formée autour de Chace[30] se soit intéressée au *Papyrus de Moscou*. Ce n'est finalement qu'en 1930 que paraît l'édition précitée de Struve, ancien élève de Turaeff. Il a reçu de nombreux concours. En particulier, il cite ses collègues russes Turaeff, Tsinserling et Yuri Perepelkin à qui il doit la transcription hiéroglyphique, mais aussi, Archibald, Otto Neugebauer, Kurt Sethe et Kurt Vogel[31] ce qui lui a permis de produire une édition qui fait autorité. Pour des publications plus récentes, nous considérerons principalement celles de Walter-Friedrich Reineke[32], S. Couchoud[33], Marshall Clagett[34], A. Imhausen[35] et M. Michel[36].

À l'origine, le *Papyrus de Moscou* devait avoir une longueur de 5,44 mètres et une hauteur de 8 centimètres. Il est aujourd'hui découpé en 11 feuillets et 9 fragments. « *Si le papyrus n'a été écrit que sur une seule face, celle-ci laisse apparaître les traces d'un écrit précédent. Quant au contenu mathématique, Struve pense qu'il a pu être recopié d'après un texte composé verticalement* [37]». La preuve peut en être trouvée dans les écritures de *khépér.khèr* (xpr.xr) et *djèd* (Dd) dans M6 et respectivement M7 et M10[38]. Quant au rédacteur, Peet est d'une extrême sévérité « *the difficulties of the papyrus are at time appalling. Middle Kingdom hieratic of a cursive type is never easy, and in the whole range of the literature of this period I know of no case where a scribe has been so criminally inconsequent in the forms of his signs. What is more, he was in some problems dealing either*

[27] Archibald, 1927, Bibliography of Egyptian Mathematics, p. 188.

[28] Peet, 1923_1, *The Rhind Mathematical Papyrus British Museum 10057 and 10058*, p. 6. Cité dans Archibald, 1927, Bibliography of Egyptian Mathematics, p. 178.

[29] Gunn, Peet, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus.

[30] Chace et *alii*, 1927-1929, *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058,*

[31] Voir Vogel, 1930, Der Moskauer mathematische Papyrus, p. 463 : la publication de Struve a enrichi de manière inattendue la connaissance des mathématiques égyptiennes « *mit der Struve unsere Kentnisse ägyptischer Mathématik in ungeahnter Weise bereichert hat* ».

[32] Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter*.

[33] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*.

[34] Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book*, Volume Three.

[35] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*.

[36] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*.

[37] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 41.

[38] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 41. Pour *khépér.khèr* (xpr.xr), voir en $M6_5$ et $M7_5$ tandis que pour *djèd* (Dd), voir $M6_2$ et $M10_{10}$.

with a faulty original or with an original which he did not understand. The result is in some case chaos [39]». Lors de son article écrit en collaboration avec Gunn, il a pu parler de l'ignorance du scribe et du fait que « *the whole book abounds in errors both of orthography and in the form of signs* [40]». Antony Spalinger peut ajouter qu'à l'évidence ce document est le travail d'un élève et non celui d'un enseignant[41]. Tout cet ensemble, sans oublier l'écriture du scribe[42] ainsi que certains manques, occasionnent de nombreuses difficultés de transcriptions et donc de traduction.

[39] Peet, 1931, Mathematischer Papyrus des Staadtlichen Museums der Schönen Künste in Moskau von W.W. Struve, p. 154.

[40] Gunn, Peet, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, p. 170.

[41] Spalinger, 1990, The Rhind Mathematical Papyrus as a Historical source, p. 298.

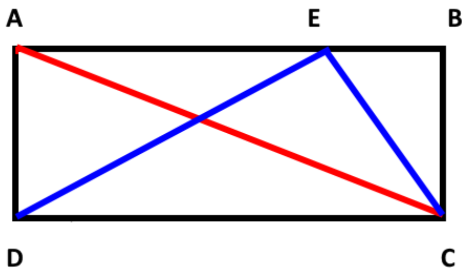
[42] Ayant examiné de près les clichés de Struve pour en extraire les fac-similés, nous pouvons affirmer que l'écriture n'est pas pâteuse mais qu'elle est mal maîtrisée. Certes le *ductus* est plus épais que pour les périodes postérieures, mais un examen attentif montre les finales des signes avec une grande finesse. Par ailleurs il faut souligner la fatigue du support qui a reçu un texte de seconde intention.

QUELQUES CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES

En situant ces problèmes dans un contexte arithmétique très général, à savoir, détermination de deux nombres dont on connaît le produit et le quotient, nous nous sommes sans doute trop éloignés du domaine géométrique dans lequel les scribes égyptiens avaient situé et surtout résolu ces exercices. Nous en voulons pour preuve le fait que dans trois problèmes, les scribes n'utilisent pas la connaissance du produit pour calculer, par division, la mesure d'une dimension lorsque celle de l'autre est connue. Ils opèrent à partir du calcul du quotient inverse, celui-ci étant aussi effectué et donc utilisé dans le quatrième exercice.

Quotient-de-proportion et forme

Nous l'avons dit dans l'introduction, comme pour le *séqèd* (sqd) qui caractérise la forme des pyramides, plus précisément, leur pente, nous pensons que la valeur numérique du terme *idéb* (jdb) employé seulement en M7, détermine la forme des rectangles et des triangles non pas quelconques mais rectangles. En effet, en termes d'aujourd'hui, par exemple, les données du quotient des mesures de la base par celle de la hauteur ne suffisent pas pour en déterminer la forme : dans la figure ci-dessous, les triangles **ACD** et **ECD** ont le même *quotient-de-proportion*, lorsque l'on considère le rapport de la mesure de la base DC à celle de la hauteur AD et ils n'ont pas la même forme.



Ceci peut justifier l'appellation que nous lui donnons, *quotient-de-proportion*.

Par ailleurs, le scribe emploie les termes *aou* (Aw) et *(ou)zékhou* ((w)zxw) qui désignent, respectivement, la *longueur* et la *largeur* d'un rectangle tant pour ce type de quadrilatère que pour les triangles qu'il considère, ce qui semble souligner leur particularité. Pour les triangles (rectangles), nous mettons alors ces traductions entre guillemets : « longueur » et « largeur ».

Enfin, nous verrons que l'écriture du déterminatif qui indique un triangle peut être interprétée comme représentant un triangle rectangle. Autrement dit, tout cet ensemble de faits, nous pousse à interpréter les exemples M7 et M17 comme se rapportant des triangles rectangles, même si, aujourd'hui, les procédures employées peuvent s'appliquer à des triangles quelconques dont nous considèrerions que les dimensions principales sont celles d'une base et de la hauteur correspondante. Mais alors point de forme. Il se peut aussi que l'obliquité du triangle dessiné par le scribe en M17 doive être reliée à la mise en évidence de la caractérisation de cette forme rectangulaire à un déplacement près.

Le cadre rectangulaire

Implicitement, les problème M6 et UC 32162-1 ont trait à des rectangles mais les scribes les situent dans un contexte plus pratique avec, pour le premier, sans doute, le terme *ât* (a.t) que nous rendons par enclos (rectangulaire) et, pour le second, avec *hayt* (HAjj.t) que nous traduisons par bande (rectangulaire).

Le terme *hayt* (HAjj.t) figure dans le *Papyrus de Berlin 6619* et dans le *Fragment UC 32162 d'El-Lahoun*. Comme l'a fait remarquer S. Couchoud, avec le déterminatif de l'étoffe frangée (S28 de la classification de Gardiner), il est associé au bandage, au pansement. Dans les problèmes concernés, le déterminatif est plus abstrait (rouleau de papyrus et traits du pluriel). Il peut alors désigner une **bande** que nous supposons être, de manière naturelle, **rectangulaire** et qui peut être un lopin de terre ou une bande de tissu qui mesure 4 *coudées* de long et 3 *coudées* de large. Mais, dans le texte qui nous est parvenu, il n'y a aucune référence aux termes classiques pour désigner un rectangle, sa longueur ou sa largeur : les « *bandes sont de 4 coudées par 3* ». Nous savons que certaines unités de superficie concernent des bandes : *coudée de terre* (bande rectangulaire de 100 *coudées* par 1 *coudée*) et *millier de terre* (mille *coudées de terre* soit une bande rectangulaire de 1000 *coudées* par 100 *coudées*). Si une *coudée de terre* représente aussi la superficie d'un carré de 10 *coudées* de côté, le *millier de terre* ne peut pas être associé à un carré dont la mesure du côté serait un nombre rationnel de *coudées* : c'est véritablement la superficie d'une bande dont les extrémités sont classiques, la bande est rectangulaire.

Quant à la transcription et par suite à la traduction du terme écrit par le scribe en M6, elles sont délicates car il figure deux fois dans une lacune du M6. Gunn et Peet y consacrent six lignes dans les notes de leur transcription. Ils lisent le déterminatif de la maison (O1 dans la classification de Gardiner) précédé sans doute des « lettres » *â* (a) et *t* (t) permettant la lecture *ât* (a.t), mot qui peut signifier une pièce, une maison ou encore un enclos. Struve retient les « lettres » *p* (p) et *t* (t) et le déterminatif de la pièce d'eau (N37 dans la même classification). S. Couchoud le suit dans cette transcription mais considère le signe du papyrus enroulé (Y1) comme déterminatif. Tous les deux donnent la même acception « rectangle ». Comme A. Imhausen et M. Michel, nous avons retenu la première transcription et adopté l'acception **enclos (rectangulaire)**, le terme employé par le scribe égyptien pouvant impliquer la rectangularité de l'enclos. Lors de notre adaptation, nous parlerons seulement d'un rectangle. Les dimensions du rectangle étant 3 et 4, cela conduit à une très petite pièce d'habitation si l'on choisit la *coudée* comme unité de mesure. En revanche, comme le soulignent Gunn et Peet, cela convient pour un enclos lorsque nous considérons le *khèt* qui vaut 100 coudées soit 52 mètres environ.

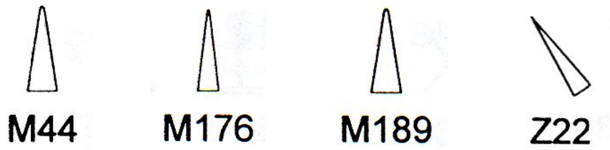
Seul le scribe qui a rédigé le *Papyrus de Moscou* propose une figure. Comme pour l'exemple R49 du *Papyrus Rhind*, nous pouvons nous interroger sur la figure tracée par le scribe. Il semble que nous soyons dans le même cas de représentation, à savoir, celle d'un double carré qui ne correspond pas aux résultats ou données des énoncés : le rectangle est de 4 par 3. Nous pouvons aussi constater que le scribe à qui nous devons le *Papyrus de Moscou* est moins soigneux qu'Âhmès, le rédacteur du *Papyrus Rhind*. En un certain sens, il est illusoire d'en déduire certains excès de précision comme nous pouvons les trouver dans les recherches menées par Gregg De Young[43], sans parler de l'exactitude de la forme représentée :


Le cadre triangulaire

Comme l'a remarqué Struve et, plus récemment, M. Michel, le scribe qui a rédigé le *Papyrus de Moscou* emploie en M4 et M7 le même terme qu'Âhmès, à savoir, *sépédèt* (spd.t). Mais, en M17, il lui préfère *sébédèt* (sbd.t), ce qui n'empêche pas tous les commentateurs d'opter pour la première transcription qui amène M. Michel à en donner ainsi deux pour la même écriture[44]. Soucieux de mettre en évidence certaines différences nous avons choisi de les souligner.

Pour notre propos, la forme particulière du déterminatif dans le *Papyrus de Moscou* doit aussi être considérée. En effet, dans le *Papyrus Rhind*, le scribe Âhmès écrit un triangle isocèle (M44 dans la classification de Gardiner) posé horizontalement sur sa base.



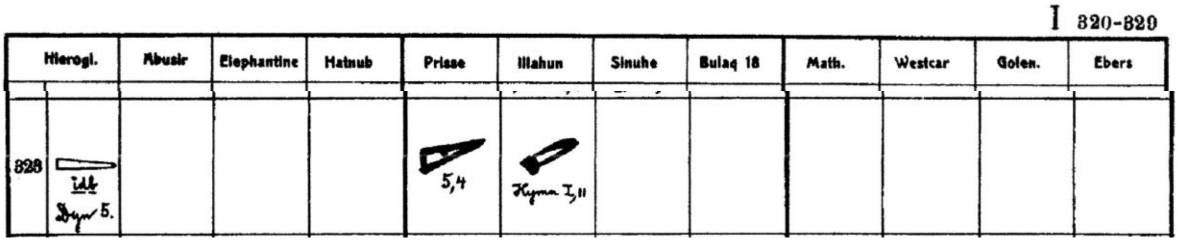


Rhind Moscou *Hieroglyphica*

Comme idéogramme le signe M44 désigne une épine, une pointe et comme déterminatif il est associé à tout ce qui est aigu, pénétrant, pointu ou encore de forme triangulaire : Gardiner[45] cite à ce sujet l'expression t-HD qui désigne un pain blanc ayant cette forme. Mais, il n'en est plus de même dans le *Papyrus de Moscou* : le « triangle » est « oblique ». Point de signe dans la classification de Gardiner mais sans doute une marque apparentée au Z22 que nous trouvons dans des polices plus complètes comme *Hieroglyphica* (nous y trouvons aussi des formes différentes de M44, voir M176 ou M189 selon que la base du triangle isocèle est plus ou moins petite par rapport à la hauteur qui est la même).

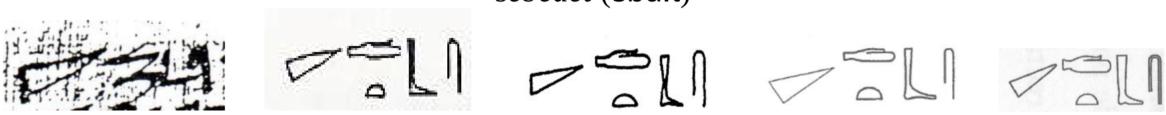
En fait, nous devons nous situer à l'époque où les documents ont été écrits et considérer, peut-être, le signe de la langue de terre (N21 dans la classification de Gardiner, n°323 de Möller) dont l'écriture hiératique est parfois semblable à celle que nous lisons dans le *Papyrus de Moscou*, à savoir, un triangle oblique comme l'est d'ailleurs celui de la figure tracée dans le M17 :

[43] De Young, 2009, Diagrams in ancient Egyptian geometry, pp. 343, 350.
[44] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, pp. 281, 285.
[45] Gardiner, 1982, *Egyptian grammar*, p. 538.



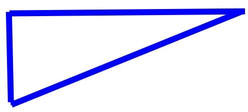
Cette obliquité semble résulter de la forme hiéroglyphique du signe N21, telle qu'elle est écrite à l'Ancien Empire. Il s'agit d'un triangle rectangle reposant sur sa base horizontale représentant une langue pentue de terre. Il se peut que la « transposition » hiératique revienne à mettre en évidence cette pente sous une forme inversée : le triangle rectangle est accroché à sa base horizontale. Dès lors, cette marque triangulaire hiératique a pu servir comme déterminatif des termes désignant un triangle, voir, par exemple, en M17. Les transcriptions proposées par les divers commentateurs sont toutes différentes :

sébédèt (sbd.t)



Papyrus Struve Gunn, Peet A. Imhausen M. Michel

Autrement dit, les transcriptions hiéroglyphiques modernes sous la forme de triangles obliques ne seraient peut-être que la mise en évidence de cette interprétation. Sans doute en employant diverses fontes d'impression, les divers commentateurs utilisent des figures qui sont toutes différentes : triangle rectangle pour Struve[46] et A. Imhausen[47], l'angle droit en haut pour le premier et en bas pour la seconde, triangle isocèle pour M. Michel et triangle dont la « base » est verticale dans l'article de Gunn et Peet. Difficile de les départager et ce d'autant plus que le scribe est peu appliqué et que ce qui peut être décidé pour une occurrence peut être facilement pris en défaut dans un autre écrit. Toutefois, nous sommes tentés de retenir la transcription du triangle rectangle inversé :



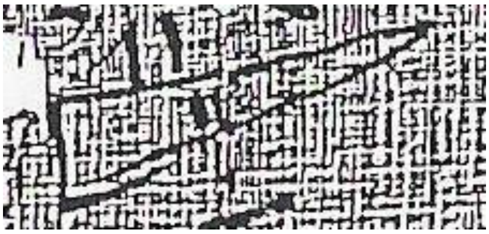
La figure du triangle en M17

Pour ajouter à notre trouble, les figures correspondant aux exemples précités sont toutes des triangles « obliques » tant dans le *Papyrus Rhind* que dans le *Papyrus de Moscou* :

[46] Struve, 1930, *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, pl. IV, XXXIII.

[47] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, pp. 310, 316.

Papyrus Rhind : R51



Papyrus de Moscou : M17

Nous savons que les scribes mésopotamiens agissaient de même[48] et qu'à une certaine époque ils ont tourné d'un quart de tour leurs tablettes, ce qui pourrait expliquer cette obliquité[49]. Toutefois, ce parallèle ne suffit pas à déterminer une influence quelconque sur les écrits égyptiens. Il se peut que le passage de la langue de terre au triangle géométrique ait influencé la représentation des triangles lors des études plus « scientifiques ». En outre, du point de vue géométrique, les scribes égyptiens ont peut-être voulu distinguer la représentation d'un triangle de celle d'une pyramide. De plus, les divers termes employés en R51 pour dénommer les dimensions, vertical pour la base et horizontal pour ce que nous pensons être la « hauteur », peuvent plaider en faveur d'une telle disposition pratique de la figure. Enfin, comme les rédacteurs des ouvrages de mathématiques modernes qui ont pris un malin plaisir à considérer des triangles quelconques « obliques », il se peut que le scribe ait délibérément utilisé l'obliquité pour souligner la caractéristique de la forme au moyen du *quotient-de-proportion*. Il n'en demeure pas moins, qu'une fois de plus, nous devons noter le peu de soin apporté par le scribe qui a rédigé le *Papyrus de Moscou*. Les côtés ne sont pas tracés à la règle et même se chevauchent et ils sont courbés. Difficile là aussi d'en déduire la nature des triangles.

Certes, nous montrerons que les procédures utilisées peuvent être mises en œuvre pour toute sorte de triangle. Mais, ici, à chaque fois, nous soulignerons la limitation à des triangles particuliers, à savoir, des triangles rectangles. En quelque sorte, le rectangle pythagoricien objet des problèmes UC 32162-1 et M7 trouve sa source dans un triangle rectangle dont les mesures des côtés et de la diagonale sont des nombres entiers. Il nous semble donc que, comme divers commentateurs, Struve[50], Neugebauer[51], Vogel[52], S. Couchoud, [53]A. Imhausen[54] ou encore M. Michel[55], nous devons considérer que les problèmes M7 et M17 ont trait à un triangle rectangle qui, lui, n'est pas pythagoricien. Par exemple, S. Couchoud s'appuie sur la similitude : « *il est donc possible de tirer de ces éléments similaires la conclusion qu'un triangle au sujet duquel on utilise les termes jdb, Aw et (w)sxw qui se retrouvent tous trois dans les formules relatives aux rectangles, doit être un triangle rectangle* [56]». Par ailleurs, sans fournir d'explications, A. Imhausen, considère pour sa part que ce que nous nommons le *quotient-de-proportion* est ici le rapport du plus grand

[48] Voir, par exemple, la tablette Str 364 du Musée de Strasbourg (Thureau-Dangin, 1938, *Textes mathématiques babyloniens*, p. 86).

[49] Cette hypothèse doit être maniée avec la plus grande prudence car ce changement s'est effectué au cours du troisième millénaire et les textes géométriques sont postérieurs de plus d'un millénaire.

[50] Struve, 1930 (1977), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, pp. 11, 125, 129.

[51] Neugebauer, 1931, Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte, p. 417.

[52] Vogel, 1930, Der Moskauer mathematische Papyrus, p. 455.

[53] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 52.

[54] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, p. 79.

[55] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 217.

[56] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 52.

au plus petit des côtés d'un angle droit[57]. Quant à M. Michel, elle inverse le propos : « *parce que nous sommes dans le cas d'un triangle rectangle (p. 296), la hauteur est appelée « longueur » et la base est appelée « largeur »* [58]».

Quotient-de-proportion et superficie

Que ce soit dans l'une ou l'autre des deux premières procédures que nous retenons, nous pourrons observer que les scribes obtiennent le carré de la première dimension qu'ils déterminent en multipliant la mesure de la superficie par le *quotient-de-proportion* ou son inverse. Or, comme le disent Gunn et Peet à propos du problème M6 « *a rectangle having breath $\frac{3}{4}$ of the length will have $\frac{3}{4}$ the area of a square on the length, since, one side of any rectangle being constant, the area varies directly as the length of the adjacent sides*[59]». Cette observation géométrique remplace donc la relation arithmétique suivante : la multiplication du produit par le quotient donne le carré du dividende comme résultat,

$$P \times Q = (x \times y) \times (x : y) = x^2 \,.$$

Gunn et Peet se servent de cette interprétation géométrique pour essayer de justifier le recours à l'inversion du *quotient-de-proportion*. En 1930, Vogel réfutera cette hypothèse en la rapprochant des techniques babyloniennes[60]. Il conservera cette opinion pendant quelque temps mais, en 1958, il donnera une illustration algébrico-géométrique du problème[61] :

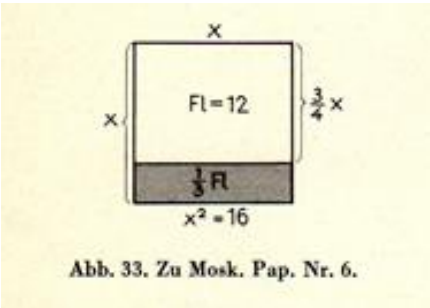


Abb. 33. Zu Mosk. Pap. Nr. 6.

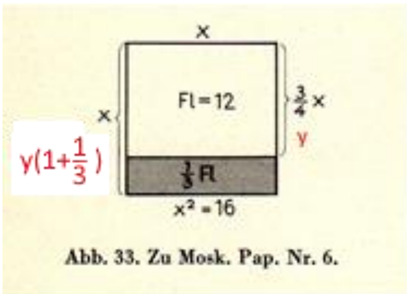


Abb. 33. Zu Mosk. Pap. Nr. 6.

Mais, si nous voulions reprendre l'image géométrique donnée par Vogel, nous devrions considérer la représentation ci-dessus corrigée en rouge, où y représente la mesure de la largeur du rectangle. En la multipliant par le *quotient-de-proportion*, c'est-à-dire, par 1 1/3 on obtient la mesure x de longueur et, par suite, le carré dont la mesure du côté est celle de la longueur.

En fait, pour justifier le recours à l'inverse du *quotient-de-proportion*, cette explication géométrique ne sert pas lors du problème M7 car le scribe l'utilise seulement pour obtenir l'autre dimension et ce, sans connotation géométrique. Gunn et Peet se gardent bien de le signaler et Vogel est trop heureux de formuler l'hypothèse babylonienne que,

---

[57] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, „ *In pMoskau, Nr. 7, dient es zur Bezeichnung des Verhältnisses zweier Seiten, die einen rechten Winkel einschließen, genauer, zur Bezeichnung des Verhältnisses der Längeren zur kürzeren Seite*", p. 78.
[58] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 217.
[59] Gunn, Peet, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, p.169.
[60] Vogel, 1930, Der Moskauer mathematische Papyrus, p. 455.
[61] Vogel, 1958, *Vorgriechische Mathematik*, t. 1, p. 64.

toutefois, rappelons-le, il ne reprendra pas ultérieurement. Autrement dit, il se peut bien que la considération de l'inverse du *quotient-de-proportion* relève d'un fait étranger au domaine géométrique même si nous venons de voir la possibilité de son utilité dans ce cadre.

Le *doublement* de la mesure de la superficie du triangle

Lors des problèmes M7 et M17 relatifs à un triangle rectangle, le scribe invite à doubler la superficie du triangle ramenant ainsi, implicitement, leur résolution à celle du rectangle circonscrit à ce triangle :

M7	**M17**
ir.khér.èk qab.èk ahèt khépér.khèr 40 Tu feras ton doublement de la superficie. Il adviendra 40. Tu doubleras la superficie. Il en résultera 40.	*ir.khér.èk qab.èk 2000 khépér.khèr 40* Tu feras ton doublement de 2000. Il adviendra 40. Tu doubleras 2000 (*coudées de terre*). Il en résultera 40 (*sétchat*).

Comme il arrive souvent, le scribe passe sous silence la conversion métrologique que ceci peut entraîner. Le problème M17 nous le montre bien. Le double de 2000 est égal à 4000 et le scribe donne pour résultat 40 soit 100 fois moins, ce qui revient à considérer que la mesure 2000 de la superficie du triangle est égale à 2000 *coudées de terre* et que son double, mesure de la superficie du rectangle circonscrit, est exprimée en *sétchat* puisque

$$1\ sétchat = 100\ coudées\ de\ terre\,.$$

Autrement dit, dans une seule expression, le scribe donne une instruction qui revient à effectuer deux opérations, le *doublement* et la transformation métrologique correspondant au changement d'unité de mesure de superficie, à savoir, de la *coudée de terre* ou au *millier de terre* à la *sétchat*. Du point de vue de l'ordre de ces deux opérations, il n'y a pas de différence sensible. Commencer par diviser 2000 (*coudées de terre*) par 100 pour obtenir 20 (*sétchat*) puis doubler ce nombre pour parvenir au résultat 40 (*sétchat*) est aussi simple que doubler 2000 (*coudées de terre*) qui donnent 4000 (*coudées de terre*) et ensuite diviser par 100 pour parvenir aux 40 (*sétchat*). M. Michel[62] opte pour le *doublement* suivi de la conversion. Nous pensons que nous devons préférer l'ordre inverse, c'est-à-dire, qu'il vaut mieux effectuer la conversion avant le *doublement*. En effet, en procédant de la sorte, on met l'accent sur la transformation essentielle pour résoudre le problème posé. Il faut opérer avec des unités de mesure de superficie qui soient des carrés d'unités de mesure de longueur. Par conséquent, on doit transformer les données exprimées en *coudées de terre* ou en *mille de terre*, en *khét carr*és, c'est-à-dire, en *sétchat*, principale unité de superficie tandis que le *khèt* est l'unité de mesure de longueur des champs : il vaut 100 *coudées* soit 52 mètres environ. Ainsi, en donnant une mesure de superficie en *sétchat*, le scribe indique, implicitement que l'unité de mesure de longueur est le *khèt*.

[62] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 219.

LES ÉNONCÉS

Nous commençons par commenter les adaptations que nous proposons pour les énoncés en examinant, si possible, les formulations relatives au *quotient-de-proportion*.

Le problème *UC 32162-1*

La partie du *Fragment UC 32162-1 d'El-Lahoun* où figure l'énoncé du problème est très lacunaire. L'adaptation que nous donnons est donc très libre :

> [*Une bande (rectangulaire) de 40* coudées *de long et 3* coudées *de large est partagée en 10 bandes (rectangulaires) ayant toutes les mêmes dimensions, leur largeur étant 1/2 1/4 de leur longueur*]

L'exercice proposé montre bien l'inversion qui doit être résolue. Dans un premier temps, de manière classique, il faut calculer la superficie de la bande (rectangulaire) dont les dimensions sont données, respectivement, 40 *coudées* et 30 *coudées*. Puisque

$$40 \times 3 = 120\,,$$

elle est égale à 120 *coudées carrées*[63]. Par suite, chacune des 10 bandes (rectangulaires) objet du partage, a une superficie de 12 *coudées carrées* :

$$120 : 10 = 12\,.$$

Et c'est dans un deuxième temps que le scribe doit résoudre le problème inverse, celui auquel nous nous intéressons : connaissant alors la mesure, implicitement en *coudées carrées*, de la superficie d'une bande partielle (rectangulaire) et le quotient des mesures, en *coudées*, de ses dimensions, déterminer celles-ci.

Le problème M6 du *Papyrus de Moscou*

Le problème M6 du *Papyrus de Moscou* est plus simple puisque nous devons seulement résoudre la deuxième partie de l'exercice précédent appliquée à un enclos (rectangulaire) pour lequel les mesures des dimensions sont les mêmes :

> **Exemple d'une manière de faire un enclos (rectangulaire).**
> S'il t'est dit : « un enclos rectangulaire d'une superficie de 12 ; la largeur est 1/2 1/4 de la longueur ».

[63] Comme de nombreux égyptologues, nous employons cette notion moderne, mais, à notre connaissance, les savants égyptiens n'ont pas de terme spécifique pour désigner cette unité de mesure de superficie. Toutefois, nous en avons peut-être ici un témoignage car le scribe écrit le nombre 120 pour une superficie de 120 *coudées carrées*, sans indiquer l'unité de mesure alors qu'avec les unités habituelles, il aurait pu écrire explicitement 1 *coudée de terre* et 2 *sétchat*. Voir nos annexes métrologie (en préparation).

Les divers commentateurs se partagent en deux groupes pour rendre la relation entre les dimensions du rectangle (nous donnons tout d'abord la transcription vocalisée puis la transcription savante et, enfin les diverses traductions) :

2' 4' èn aou èn (ou)zékh<ou>
2' 4' n Aw n (w)zx<w>
Gunn, Peet : *the breath having* $\frac{3}{4}$ *of the length,*
Struve : *½ ¼ der Länge für die Breite*,
Vogel : *3/4 der Länge für die Breite*,
Neugebauer : $\overline{2} + \overline{4}$ *der Länge für die Breite*,
Gillings : $\overline{2}\ \overline{4}$ *of the length for the breath*,
Reineke : *½ ¼ der Länge für die Breite*,
Couchoud : *½ + ¼ de la longueur pour la largeur*,
Clagett : *a breath ½ ¼ of its length*,
Imhausen : $\overline{2}\ \overline{4}$ *der Lange für die Breite*,
Michel : $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ *de la longueur pour la largeur*.

Les uns suivent l'ordre d'énonciation que nous avons retenu pour notre traduction

2' 4' de la longueur pour la largeur,

tandis que les autres adoptent une formulation plus libre que nous retrouvons dans notre adaptation :

la largeur est 1/2 1/4 de la longueur.

En fait, nous devons retenir que le scribe énonce multiplicativement la relation entre les dimensions. En d'autres termes, la largeur est un certain *nombre-de-fois* un multiple de la longueur. Si nous notons L et l les mesures respectives de la longueur et de la largeur du rectangle relativement à une même unité de longueur, elle revient à écrire :

$$l = L \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right),$$

et non pas

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad l : L = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{ou encore} \quad l = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times L\,.$$

En quelque sorte, ceci induit une certaine heuristique. Connaissant la mesure de la longueur, cette relation permet d'en déduire, immédiatement, celle de la largeur. Autrement dit, il faut essayer de déterminer d'abord la mesure de la longueur.

Le problème M7 du *Papyrus de Moscou*

Lors de l'énoncé du M7, le scribe innove en considérant, d'une part, un triangle et, d'autre part, en nommant *idèb* (jdb) ce que nous pouvons appeler le *quotient-de-proportion*.

Exemple d'une manière de procéder pour un triangle (rectangle).
S'il t'est dit : « un triangle d'une superficie de 2 *milles de terre* et de *quotient-de-proportion* 2 1/2 ».

idèb èn 2 2'
idb n 2 2'
Gunn-Peet : *the "bank" of* 2 $\frac{1}{2}$,
Struve : *des* jdb- *Verhältnisses von* 2 ½,
Neugebauer : *ein* jdb *von* 2 ½,
Reineke : *von einem* jdb-*Verhältnis von* 2 ½,
Couchoud : *(d'une relation entre les deux) côtés de* 2 1/2,
Clagett : *"bank"* (jdb, *i.e., the ratio of height to base) of* 2 1/2,
Imhausen : *des* jdb-*Verhältnisses zu* $\overline{2}\ \overline{4}$,
Michel : *et d'un quotient de* 2$\frac{1}{2}$.
***idèb* : 2 2'**. *Quotient-de-proportion* : 2 1/2.

Cette fois, le scribe nomme l'expression numérique 2 1/2 qui, aujourd'hui, peut être considérée comme étant le quotient des dimensions d'un triangle rectangle relativement à une même unité de mesure de longueur. Néanmoins, le terme ***idèb* (jdb)** étant absent des autres textes mathématiques qui nous sont parvenus de l'Égypte ancienne, nous agissons comme pour le *séqèd* (sqd) des pyramides, c'est-à-dire, leur pente : nous conservons le terme égyptien lors de notre traduction et choisissons, pour l'adaptation, une expression proche de sa signification, à savoir, ici, *quotient-de-proportion*. En fait, les deux termes égyptiens précités caractérisent la forme des objets considérés, d'une part, ici, rectangle ou triangle (rectangle) et, d'autre part, pyramide.

Nous pouvons noter que c'est le seul problème où le *quotient-de-proportion* est supérieur à 1. *A priori*, afin d'avoir une signification plus précise, il se peut que le terme *idèb* (jdb) soit le quotient de la mesure de la plus grande dimension à celle de la plus petite dimension. C'est l'option que nous avons retenue.

Bien sûr, d'un point de vue opératoire, ce *quotient-de-proportion* est obtenu à partir du quotient des mesures des dimensions. Ainsi, si nous notons L et l les mesures de la « longueur » et de la « largeur » du triangle rectangle relativement à une même unité de longueur, le fait que le *quotient-de-proportion* soit égal à 2 1/2 revient à écrire, aujourd'hui,

$$\frac{L}{l} = L : l = 2 + \frac{1}{2}.$$

Nous verrons que ce quotient de la plus grande dimension à la plus petite étant plus grand que 1, ceci induit sans doute un changement de procédure.

Le problème M17 du *Papyrus de Moscou*

Dans le dernier problème de dimensions, à savoir, le M17, le scribe montre la véritable particularité du *quotient-de-proportion* tant dans cet exercice qu'en M7 : les deux *quotients-de-proportion* sont inverses l'un de l'autre et en M17, il s'agit de l'expression classique du double du quantième 1/5,

$$\frac{1}{5} \times 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Exemple d'une manière de procéder pour un triangle (rectangle).
S'il t'est dit : « un triangle de 2000 (*coudées de terre*) pour sa superficie. De ce que tu mets pour la « longueur », tu dois en mettre 1/3 1/15 pour ce qui est la « largeur ».

ir dit.èk hèr aou didi.èk 3' 15' iou.èf hèr (ou)zékhou
jr dj.t.k Hr Aw djdj.k 3' 15' jw.f Hr (w)zxw

Gunn-Peet : *what you put on the length, you must put* $\frac{2}{5}$ *thereof on the breath*,
Struve : *Das, was du gibst auf die Länge ist* <1> *(und) du gibst (noch)* 1/3 1/15, es ist auf der Breite,
Vogel : *was du gibst auf die Länge ist* 1 *und du gibst* 2/5, *es ist auf der Breite*,
Neugebauer : *Von dem was du auf die Länge gibst* (Hr Aw), *gibst du* $\overline{3}+\overline{15}$ *auf die Breite* (Hr sx.w),
Reineke : *Was anbetrifft das, du gibst auf die Länge, wenn du gegeben hast* 1/3 1/15 *(davon, so) ist es auf der Breite*,
Couchoud : *De ce que tu mets à la longueur tu dois mettre* 1/3 1/15 *à la largeur*,
Clagett : *what you put on the length, you must put* 1/3 1/15 *(i.e., 2/5) thereof on its breadth*,
Imhausen : *Was betrifft das, was du auf die Länge gibst, du hast* $\overline{3}\ \overline{15}$ *veranlaßt (und) es ist die Breite*,
Michel : *Si tu donnes la longueur et que l'on te donne* $\frac{1}{3}\frac{1}{15}$ *pour ce qui est la largeur*.

Les transcriptions et traductions de ce texte sont diverses pouvant même conduire à de mauvaises interprétations comme celle donnée par M. Michel qui sous-entend que l'on « donne 1/3 1/15 pour ce qui est la largeur » alors qu'il s'agit du 1/3 1/15 de la longueur. Fort justement, Gunn et Peet et, plus tard, Clagett, précisent en ajoutant la conjonction « *thereof* » tandis que W. Reineke utilise « *davon* ». Afin d'éviter toute ambiguïté, A. Imhausen se place plutôt dans le cadre d'une explication. En fait, le scribe traite le troisième exemple d'un même type de problèmes. Comme nous le voyons très souvent sous le calame d'Âhmès dans le *Papyrus Rhind*, peu à peu, le scribe fournit diverses explications. Au laconique énoncé de M6 succède une forme abstraite en M7 et, maintenant, pour le dernier exercice en M17, une forme qui se veut plus explicite et qui, sans doute, est employée pour mieux saisir la solution qui est proposée. Ainsi, point d'emploi du terme abstrait *idèb* (jdb) mais, par contre, considération de l'expression numérique 1/3 1/15 comme un tout. En effet, le scribe semble se situer au plus près des mesures et se placer ainsi dans un cadre numérique qui sous-entend que l'on doit utiliser les mêmes unités de mesure pour les deux dimensions. Rappelons que ce n'est pas toujours le cas puisque les scribes égyptiens considèrent comme unité de mesure de superficie, la *coudée de terre*, qui peut être considérée comme étant la mesure de la superficie d'un rectangle dont les côtés ont la même mesure, à savoir, 1, mais relativement à deux unités différentes de mesures de longueur, à savoir, le *khèt* et la *coudée*[64]. Enfin, le scribe semble vouloir se situer dans une perspective plus large : les triangles ou rectangles qui vont être considérés donnent lieu au même quotient des dimensions. Comme il le montre dans la figure qu'il trace, nous avons à la fois la considération de l'unité avec les dimensions 1 et 1/3 1/15 et, bien sûr les dimensions cherchées 10 et 4 du triangle. En quelque sorte, ceci n'a pas échappé à Struve qui ajoute 1 dans l'énoncé. Tout cet ensemble de

[64] Un *khèt* valant 100 *coudées* une *coudée de terre* est aussi la superficie d'un carré de 10 *coudées* de côté.

considérations nous conduit à proposer l'adaptation suivante : De ce que tu mets pour la « longueur », tu dois en mettre 1/3 1/15 pour la « largeur ».

Comme le montre la solution donnée par le scribe, il semble que cette formulation joue un rôle important dans son heuristique. En effet, le scribe doit alors chercher la mesure de la « longueur » pour déterminer celle de la « largeur ». Mais, en fait, le triangle est rectangle. Dès lors, il doit considérer le carré dont la mesure du côté est celle de la « longueur ». Il faut alors savoir combien on doit mettre à la « largeur » pour obtenir la « longueur ». D'où la considération de l'inverse du *quotient-de-proportion* qui, *a priori*, pouvait sembler être inutile. Mais, comme l'indique Schack-Schackenburg[65] pour le *Fragment UC 32162-1* (sans que la traduction qu'il propose le laisse entrevoir), il n'est pas exclu qu'en M17 cette formulation induise une sorte de *Regula falsi*. Celle-ci pourrait être une méthode de fausse position utilisée dans un cadre particulier. Appliquée au cas de l'unité, on en déduirait la mesure 1/3 1/15 de la « largeur » et il ne resterait plus qu'à déterminer le coefficient de proportionnalité permettant d'obtenir la mesure de la superficie donnée. Nous y reviendrons.

En guise de conclusion

Les scribes égyptiens varient à plaisir la formulation des énoncés. Il en est ainsi pour ce que nous appelons le *quotient-de-proportion* traduction que nous proposons pour le terme *idèb* (jdb) employé par le rédacteur du *Papyrus de Moscou* seulement lors du problème M7. Nous pensons que ce mot désigne plus particulièrement le résultat de la division de la mesure de la plus grande dimension par la mesure de la plus petite dimension. Il caractérise la forme d'un rectangle ou d'un triangle rectangle. Sa valeur est donc obtenue par division mais nous verrons que dans la pratique il est utilisé multiplicativement suivant, par exemple, ce qui est dit en M6 : « *1/2 1/4 de la longueur pour la largeur* ». En fait, c'est le *nombre-de-fois* que la mesure d'une dimension est multiple de la mesure de l'autre dimension.

Hier comme aujourd'hui, il est facile de construire de tels énoncés. Il suffit de se donner deux nombres entiers, d'en faire le produit et le quotient et de donner le résultat de ces opérations puis de proposer de les déterminer. Il ne semble pas que les scribes qui ont proposé ces problèmes aient procédé tout à fait de cette manière. Les données ne sont pas quelconques. Comme nous l'avons dit, dans les problèmes UC 32162-1 et M6, nous trouvons une origine pythagoricienne du *quotient-de-proportion* tandis qu'en M7 et M17 ce sont les *expressions de 2 à partir d'un entier* qui peuvent être retenues. Toutefois, les scribes sont restés dans un cadre élémentaire et, pour tout dire, primitif : rectangle de côtés multiples des nombres 3 et 4 d'une part et expression classique du double du quantième 1/5, d'autre part. Ces nombres particuliers permettent de donner lieu à de nombreuses simplifications. Autrement dit, en quelques sorte, les procédures que nous en déduisons sont limitées dans leurs applications. Par exemple, considérer un rectangle pythagoricien quelconque présente peu d'intérêt pour ce propos algorithmique, sauf celui d'appliquer une des procédures que nous allons mettre en évidence : le caractère pythagoricien ne joue aucun rôle. En revanche, les *expressions de 2 à partir d'un entier*, lorsqu'elles sont connues, permettent d'utiliser plus largement ces techniques : le *quotient-de-proportion* ou son inverse a une expression simple égale à la somme d'un entier et de 1/2. Mais, encore dans ce cas, les scribes n'en exploitent pas toutes les possibilités.

[65] Schack-Schackenburg, 1900, Der Berliner Papyrus 6619, p. 139.

MÉTROLOGIE

Théoriquement, la métrologie peut jouer un rôle important dans la résolution des problèmes que nous considérons. En effet, il doit y avoir une concordance certaines entre les diverses unités de mesures de longueurs et de superficies. Or les scribes sont peu loquaces sur ce point. Ainsi, dans le *Fragment UC 32162-1 d'El-Lahoun*, nous apprenons seulement et ce, dans la conclusion, qu'il s'agit de 10 bandes (rectangulaires) de 4 *coudées* par 3. Par ailleurs, lors de l'énoncé de l'exercice M7, l'auteur utilise la notation particulière signifiant 2 *milles de terre*. Mais les autres textes restent silencieux dans les considérations métrologiques. Est-ce à dire que les scribes s'en désintéressent ? Nous ne le pensons pas.

En M7, ceci donne lieu à diverses transcriptions et, bien sûr, différentes traductions. S. Couchoud, A. Imhausen et M. Michel suivent la transcription qu'elles ont donnée, à savoir, le chiffre 2, indiquant ainsi un triangle de superficie 2 sous-entendu, 2 *milles de terre*. À l'opposé, Struve, W. Reineke et Clagett, ont transcrit le nombre 20 et ils le reprennent dans leur traduction. Seuls, Gunn et Peet, ainsi que Neugebauer considèrent le *mille de terre*, tandis que Struve et Clagett ajoutent au nombre 20 la spécification entre parenthèses, *khèt carré* ou *sétchat*. Toutefois, lors des commentaires, certains auteurs sont amenés à préciser. Ainsi, S. Couchoud souligne que « *la surface totale est donnée en dizaines d'aroures, autrement dit, en 10^5 coudées-carré* [66]» et M. Michel, indique aussi entre parenthèses, *l'aire étant exprimée en* kha-ta[67]. En fait, le scribe a écrit le chiffre 2, ce qui nous a conduit à le transcrire et le traduire 2_m comme étant la notation spécifique de 2 *milles de terre* que nous avons explicitée lors de l'adaptation. Mais, la première instruction de la solution invite à doubler la superficie et le scribe donne pour résultat le nombre 40. Nous sommes donc amenés à considérer une autre unité de mesure de superficie, à savoir, la *sétchat* traduite aussi par *aroure*, sachant qu'un *mille de terre* vaut 10 *sétchat*. Indirectement, ceci nous invite à prendre en compte le *khèt* comme unité de longueur sachant qu'une *sétchat* vaut un *khèt* carré et un *khèt* vaut 100 *coudées*. Notons qu'un *mille de terre* vaut 1000 *coudées de terre* et que cette dernière unité est la superficie d'une bande rectangulaire d'une longueur d'un *khèt* et ayant une *coudée* de large. Par conséquent[68] :

$$1\ sétchat = 1\ khèt\ carré = (100 \times 100)\ coudées\ carrés\ ;$$

$$1\ coudée\ de\ terre = 1\ khèt - coudée = 100\ coudées\ carrées\ ;$$

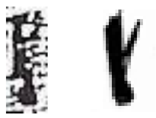
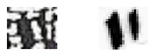
$$1\ mille\ de\ terre = 1000\ coudées\ de\ terre = (1000 \times 100)\ coudées\ carrées = 10\ sétchat\ .$$

Il n'en demeure pas moins que, d'un point de vue mathématique, il est plus commode d'utiliser des unités de superficies correspondant à un carré, comme la *sétchat*, que des unités de superficies « rectangulaires » comme le *mille de terre*. D'où le résultat donné, en *sétchat*, par le scribe.

[66] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 48.
[67] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 219.
[68] Bien entendu, les expressions *khèt carré*, *coudée carrée* ou encore *khèt-coudée* sont modernes.

À l'opposé, il se peut que les scribes veuillent insister sur la quantité de *coudées carrées* bien qu'à notre connaissance, ils n'aient pas de nom particulier pour désigner cette unité de mesure de superficie. Par exemple, dans le *Fragment UC 32162-1 d'El-Lahoun*, l'auteur écrit le nombre 120 correspondant effectivement à la superficie totale de « 10 bandes (rectangulaires) de 4 *coudées* par 3 » donc à 120 *coudées carrées*, sans indiquer l'unité de mesure.

Il se peut que la situation soit assez semblable en M17 où, pour indiquer la mesure de la superficie d'un triangle le scribe écrit trois marques différentes :

Seule la dernière est sans ambiguïté puisque l'auteur a tracé deux traits verticaux, c'est-à-dire, le chiffre 2. Ils sont inscrits à l'intérieur de la figure, plus précisément, du triangle. C'est la transcription retenue par tous les commentateurs. Seul, dans ses notes, Struve pense qu'il s'agit de la graphie usuelle pour 20 *khét carrés*[69]. Ce nombre 20 correspond effectivement aux résultats donnés par le scribe pour les dimensions du triangle, à savoir, 10 et 4 ce qui donne une superficie de 20 unités carrées. Or, le scribe ne précise pas les unités de mesure employées. Nous sommes donc amenés à relier les deux nombres 2 et 20 comme correspondant à des unités différentes. Sachant qu'un *mille de terre* vaut 10 *sétchat*, soit encore, 10 *khèt carrés*, nous pouvons penser que le chiffre 2 correspond à 2 *milles de terre*. C'est ce que souligne M. Michel dans son commentaire en écrivant, à l'intérieur du triangle « *Aire = 2* kha-ta [70]», *kha-ta* étant le terme égyptien désignant le *mille de terre*.

Ces deux interprétations se retrouvent dans les diverses transcriptions et, par suite, traductions des deux autres marques. Ainsi, Gunn et Peet considèrent que le scribe a écrit le chiffre 2000 tout en ajoutant que celui-ci « *is abnormally formed, but the reading is not in doubt* [71]». Ils sont suivis par S. Couchoud[72] et M. Michel[73]. En revanche, les autres commentateurs adoptent la voie tracée par Struve[74] qui revient à considérer une écriture spéciale pour signifier 20 *khèt carré,* soit 20 *sétchat*. Toutefois, en note, A. Imhausen[75] renvoie aux deux interprétations tout en soulignant que les marques rappellent le chiffre 2000. En effet, nous savons que le scribe est peu soigneux et que dès lors, nous pouvons considérer que la première occurrence se rapproche du signe hiératique pour 2000 constitué par deux barres verticales soulignés par un « z ». Ici les deux barres sont jointes comme cela arrive dans l'écriture hiératique du chiffre 5000. On peut hésiter pour la deuxième occurrence. Nous aurions donc le chiffre 2000 pour 2 *milles de terre*.

[69] Struve, 1930, *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, p. 132, „*Die übliche graphische Bezeichnung von 20 Quadrat- xt mit zwei vertikalen Strichen*".

[70] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 289.

[71] Gunn, Peet, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, p. 174.

[72] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, pp. 49-51, « *la surface du triangle est exprimée en coudées carrées, mais la suite du calcul est exprimée en tA (100 coudées au carré), de même que les résultats* ».

[73] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p.287, « *2000 (coudées de terre)* ».

[74] Struve, 1930, *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, pp. 129-130, „*eine eigenartige Schreibung des Zeichens für 20 Quadrat- xt*".

[75] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, "*Anstelle von 20 wurde jeweils ein Zeichen geschrieben, welches an 2000 erinnert*".

Quotient-de-proportion, *nombre-de-fois* et inversion

La donnée essentielle des problèmes que nous considérons est celle du nombre que nous nommons *quotient-de-proportion* ou *nombre-de-fois* pour lequel le rédacteur du *Papyrus de Moscou* emploie, seulement en M7, le terme *idéb* (jdb). Il nous semble que, pour les rectangles et les triangles rectangles, ce mot joue le même rôle que le *séqèd* (sqd) employé par Âhmès, dans le *Papyrus Rhind*, à propos des pyramides, à savoir, la caractérisation de leur forme. Appliqué aux polygones précités, nous pouvons penser qu'il est obtenu en effectuant le quotient des mesures de leurs dimensions principales, longueur et largeur pour les rectangles et côtés de l'angle droit pour les triangles rectangles. D'où notre appellation, *quotient-de-proportion* associant son obtention, comme quotient, et sa forme, par le biais de la proportion.

Comme nous le montrerons ci-après, les deux procédures que nous pouvons déduire des textes étudiés se distinguent essentiellement selon la valeur du *quotient-de-proportion*, plus précisément, selon qu'elle est inférieure à 1 ou supérieure à 1. Il nous semble que le terme *idéb* (jdb) est, sans doute, lié au deuxième cas c'est-à-dire au quotient de la mesure de la plus grande dimension par celle de la plus petite.

Contrairement à certains problèmes de calculs de *séqèd* dans le *Papyrus Rhind*, ici, nous n'avons pas de calculs *d'ibèd*, ce qui impliquerait la connaissance des mesures des dimensions. Nous devons seulement résoudre le problème inverse : calcul des dimensions à partir des données de la mesure de la superficie et de la valeur du *quotient-de-proportion*. En fait, comme nous l'avons souligné, en dehors du M7, cette dernière est donnée sous une forme multiplicative ce qui revient à indiquer combien la mesure d'une dimension est un multiple de l'autre. En d'autres termes, l'*idèb* est alors ce *nombre-de-fois*. Dans ce cadre de quantité, les scribes sont amenés à privilégier l'introduction de l'inverse du *quotient-de-proportion* ce qui, *a priori*, peut sembler être inutile. Selon que le *quotient-de-proportion* est inférieur ou supérieur à 1, celle-ci figure en début de procédure ou vers la fin. Autant dire que les scribes lui attribuent un rôle important. Notons que nous retrouvons cette utilisation de l'inverse dans les problèmes démotiques semblables. Ceci nous amène à nous interroger sur la pertinence de sa considération et, bien sûr, sur son obtention car les scribes restent silencieux sur la manière d'opérer.

D'une manière générale, si Q est le *quotient-de-proportion*, alors nous pouvons exprimer cette instruction comme suit[76] :

Divise 1 par Q. Il en résultera $\bar{Q}$.

Selon les expressions générales que nous trouvons dans le *Papyrus Rhind*, nous nous attendrions à lire :

ir.khér.èk Q *èr gémèt* 1 *khépér.khèr èm* $\bar{Q}$ { jr.xr.k Q r gm.t 1 xpr.xr m $\bar{Q}$ }
Tu feras Q jusqu'à trouver 1. Il adviendra : $\bar{Q}$. Tu diviseras 1 par Q. Il en résultera $\bar{Q}$.

---

[76] En quelque sorte, appliquée à des nombres fractionnaires, notre notation $\bar{Q}$ pour l'inverse du *quotient-de-proportion* Q ne fait que généraliser celle introduite en son temps par Neugebauer pour noter les inverses des entiers naturels non nuls, ce que nous appelons les *quantièmes*.

Or, comme pour les énoncés des exercices, les formulations correspondantes sont différentes.

Le problème *UC 32162-1 d'El-Lahoun*

Le scribe qui a rédigé le *Fragment UC 32162-1* est plus loquace que l'auteur du *Papyrus de Moscou*. Il emploie l'écriture rouge afin de mettre en évidence les expressions numériques. En plus, il ajoute le terme *pa* (pA) pour souligner le nombre qui est concerné, ici, le *quotient-de-proportion* ; au lieu du chiffre 1 il considère son écriture littérale comme pour mieux souligner l'intervention de l'unité et il formule l'expression du résultat d'une manière tout à fait particulière qui, en fait, est une réduction de deux « instructions », résultat et utilisation de ce dernier sous la forme d'un multiplicateur.

ir.kh[ér].èk pa **2′ 4′** *èr [gé]mèt ouâ khépérèt im pou zèp [***1 3′***]*
jr.x[r].k pA **2’ 4’** r [g]m.t wa xpr.t jm pw zp [**1 3’**]
Griffith : *Make thou that* $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ *to find* 1 *: the result thereof is* $1\frac{1}{3}$ *times,*
Gillain : *Multiplie ce* $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ *pour trouver* 1 *: le résultat est* $1\frac{1}{3}$ *fois,*
Reineke : *Dann sollst du machen ½ ¼, um zu finden 1. Es ergibt 1 1/3*,
Gillings : *Make thou* $\overline{2}\ \overline{4}$ *to find* 1. *The result thereof is* $1\ \overline{3}$ *times.*
Couchoud : *Tu multiplieras 1/2 1/4 pour en trouver 1. Il advient de cela 1 1/3 fois.*
Clagett : *Calculate with 1/2 1/4 to find 1. The result thereof is 1 1/3,*
Imhausen *: Dann [dividierst] du eins durch diese [*$\overline{\mathbf{2}}\ \overline{\mathbf{4}}$*]. Das, was resultiert, sind [*$\mathbf{1}\ \overline{\mathbf{3}}$*] Male.*
Imhausen, Ritter : *You shall divide 1 by this* $\overline{\mathbf{2}}\ \overline{\mathbf{4}}$. *That which shall result is* $\mathbf{1}\ \overline{\mathbf{3}}$ *times.*
Michel : *Alors tu fais en sorte de calculer* $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ *pour trouver* 1, *il advient* $1\frac{1}{3}$.

Dans notre traduction et notre adaptation, nous avons essayé de mettre en évidence diverses possibilités.

Tu fe[r]as ce **2′ 4′** jusqu'à [trou]ver un. De là, ce qu'il adviendra, c'est [**1 3′**] fois.
Tu diviseras 1 par **1/2 1/4**. De là, ce qui en résultera est **1 1/3** fois.

Aujourd'hui, nous pouvons écrire :

$$1 : \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 1 : \frac{3}{4} = 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}.$$

Certains commentateurs passent sous silence le fait que le scribe insiste sur un *nombre-de-fois*. En M17, le rédacteur du *Papyrus de Moscou* agira de même mais il l'omet en M6 et M7. En fait, nous verrons que cette précision est importante. Elle peut nous permettre de mieux comprendre le rôle joué par ce calcul d'inversion. Alors que d'après l'énoncé « la largeur est 1/2 1/4 de la longueur », ici, le scribe souligne implicitement que « la mesure de la longueur est 1 1/3 *fois* la mesure de la largeur ».

Le problème M6 du *Papyrus de Moscou*

Par l'emploi de l'expression *ir.èk* (jr.k) que nous traduisons par « ta manière de calculer », le problème M6 est un des nombreux exemples du *Papyrus de Moscou* où le scribe insiste sur la procédure que suit habituellement l'élève pour effectuer une opération, ici, obtenir l'inverse du *quotient-de-proportion*. Nous la retrouvons en M17 mais nous ne savons pas qu'elle est cette manière de calculer. L'expression du résultat est « classique ».

> *ir.khér.èk ir.èk* 2′ 4′ *èr gémèt ouâ khépér.khèr èm 1 3'*
> jr.xr.k jr.k 2' 4' r gm.t wa xpr.xr m 1 1/3
> Gunn, Peet : *You are to treat* $\frac{3}{4}$ *so as to find 1; the result is* $1\frac{1}{3}$,
> Struve : *Berechne du ½ ¼ um zu finden Eins. Es entsteht 1 1/3,*
> Vogel : *dividiere* 1 *durch* $\overline{2}\ \overline{4}$, *es ergibt* 1 $\overline{3}$,
> Gillings : *Calculate* $\overline{2}\ \overline{4}$ *until you get* 1. *Result* 1 $\overline{3}$,
> Reineke : *Dann sollst du machen ½ ¼, um zu finden 1. Es ergibt 1 1/3,*
> Couchoud : *alors calcule 1/2+1/4 pour obtenir 1.Il advient 1 1/3,*
> Clagett : *Calculate ½ ¼ to get 1. The result is 1 1/3,*
> Imhausen (Algorithmen) : *Dann dividierst du* 1 *durch* $\overline{2}\ \overline{4}$. *Dann resultiert* 1 $\overline{3}$,
> Michel : *Alors tu fais en sorte de calculer* $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ *pour trouver* 1, *il advient* $1\frac{1}{3}$.
>
> Tu feras ta manière de calculer, 2' 4' jusqu'à trouver un. Il adviendra : 1 3'
> Tu diviseras 1 par 1/2 1/4. Il en résultera : 1 1/3.

Le problème M7 du *Papyrus de Moscou*

En M7, le scribe utilise le verbe *nis* (njs) « exprimer » qui souligne l'expression qui, éventuellement, peut être obtenue au moyen d'une division comme pour les *expressions de 2 à partir d'un entier* que nous trouvons dans le *Papyrus Rhind* :

> *nis ouâ khénèt 2 2' khépérèt <im p>ou 3' 15'*
> njs wa xnt 2 2' xpr.t <jm p>w 3' 15'
> Gunn-Peet : *Evoke* 1 *from* $2\frac{1}{2}$; *what results is* $\frac{2}{5}$ *(*written* $\frac{1}{3}\frac{1}{15}$*)*,
> Struve : *Dividiere Eins durch 2 ½. Das, was [da] entsteht [ist] 1/3 1/15,*
> Reineke : *Es werde geteilt 1 durch 2 ½ das, was daraus entsteht, ist 1/3 1/15,*
> Couchoud : *diviser 1 par 2 ½. Ce qu'il en advient est 1/3 1/15,*
> Clagett : *Call up 1 from 2 ½, The result is 1/3 1/15,*
> Imhausen : *Dividiere eins durch* 2 $\overline{2}$! *Das, was daraus resultiert ist* $\overline{3}\ \overline{15}$,
> Michel : *Divise* 1 *par* 2 $\frac{1}{2}$. *Ce qu'il en advient est* $\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$.
>
> Exprime un à partir de 2 2'. <De là, ce> qu'il adviendra, c'est 3' 15'.
> Divise 1 par 2 1/2. Ce qui en résultera est 1/3 1/15.

Aujourd'hui, nous pouvons écrire :

$$1 : \left(2+\frac{1}{2}\right) = 1 : \frac{5}{2} = \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \times 2 = 2 : 5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Le problème M17 du *Papyrus de Moscou*

En M17, le scribe insiste à nouveau sur la manière de calculer employée par l'élève et il termine l'expression du résultat sous la forme d'un *nombre-de-fois*.

ir.khér.èk ir.èk 3' 15' èr gémèt 1 khépér.khèr zèp 2 2'
jr.xr.k jr.k 3' 15' r gm.t 1 xpr.xr zp 2 2'
Gunn-Peet : *You are to treat* $\frac{2}{5}$ *so as to find* 1*; result* $2\frac{1}{2}$ *times,*
Struve : *Rechne du mit 1/3 1/15 um zu finden 1. Es entsteht 2 ½ mal,*
Reineke : *Du sollst machen 1/3 1/15, um zu finden 1. Es ergibt 2 ½ Mal,*
Couchoud : *Tu feras une multiplication de 1/3 1/15 pour trouver 1. Le résultat est 2 ½ fois,*
Clagett : *Reckon with 1/3 1/15 so as to find 1. The result is 2 ½ times,*
Imhausen : *Dann dividierst du* 1 *durch* $\overline{3}$ $\overline{15}$*.Dann resultiert* 2 $\overline{2}$ *mal,*
Michel : *Alors tu fais en sorte de calculer avec* $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ *pour trouver* 1*, il advient fois* $2\ \frac{1}{2}$.

Tu feras ta manière de calculer, 3' 15' jusqu'à trouver 1. Il adviendra 2 2' fois.
Tu diviseras 1 par 1/3 1/15. Il en résultera 2 1/2 fois.

Aujourd'hui, nous pouvons écrire :

$$1 : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = 1 : \frac{2}{5} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}.$$

Comme déjà indiqué, la référence au *nombre-de-fois* induit la multiplication qui va suivre, le *nombre-de-fois* étant le multiplicateur.

En guise de conclusion

Après ces commentaires des diverses occurrences de l'inverse du *quotient-de-proportion* essayons de répondre aux questions que nous avons formulées dans l'introduction de ce chapitre. Quel est le but de l'introduction de l'inverse du *quotient-de-proportion* ? Comment peut-on l'obtenir ?

Pour la première question, nous verrons que les scribes utilisent l'inverse du *quotient-de-proportion* dans deux situations. Commençons par considérer celle que nous trouvons en M7. Certes, c'est le seul problème où le scribe emploie le terme *idèb* (jdb), mais nous pouvons admettre la traduction « algébrique » suivante du problème avec un énoncé multiplicatif :

$$L \times l = 40 \quad \text{et} \quad L = l \times \left(2 + \frac{1}{2}\right).$$

Ayant obtenu, la mesure 10 de la longueur, il reste à déterminer celle de la largeur. Compte-tenu des égalités ci-dessus, on pourrait penser que le scribe procède alors par division, soit de 40 par 10, soit de 10 par 2 1/2 :

$$l = 40 : 10 = 4 \quad \text{ou} \quad l = 10 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 4.$$

Quelle que soit l'option qui pourrait être choisie, ces opérations sont immédiates : il suffit d'effectuer deux *doublements*. Or, le scribe procède différemment. Il commence par « calculer » l'inverse du *quotient-de-proportion*, soit, 1/3 1/15,

$$\bar{Q} = \overline{2 + \frac{1}{2}} = 1 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15},$$

ce qui, *a priori*, n'est pas immédiat, puis il considère cet inverse comme multiplicateur de la mesure 10 de la longueur

$$l = 10 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = 4,$$

multiplication, qui, elle aussi, n'est pas immédiate lorsqu'on n'en connaît pas le résultat. Autrement dit, la procédure suivie par le scribe semble être inappropriée. Il ne nous reste qu'une seule hypothèse. Le scribe a voulu insister sur le *nombre-de-fois* : de combien la mesure de la largeur est-elle un multiple de la mesure de la longueur ? Et c'est l'inverse du *quotient-de-proportion* qui en donne le nombre.

Dans les trois autres problèmes, le *quotient-de-proportion* est inférieur à 1 et les scribes commencent leur résolution en calculant l'inverse de ce nombre. Encore une fois, aujourd'hui, cette manière de procéder semble être inutile. En effet, nous situant dans le domaine algébrique, on remplace la résolution du système

$$L \times l = P \quad \text{et} \quad l = L \times Q,$$

par celle d'un système de même nature où les inconnues L et l sont interverties

$$l \times L = P \quad \text{et} \quad L = l \times \bar{Q}.$$

Tout au plus, il se peut que, comme en M17, l'expression de l'inverse soit plus simple que celle du *quotient-de-proportion* : 2 1/2 au lieu de 1/3 1/15. Mais cette considération de l'inverse dans les trois problèmes nous amène à prendre en compte ce qui les réunit, à savoir, *le quotient-de-proportion* y est inférieur à 1. En calculant son inverse, on introduit un coefficient multiplicatif supérieur à 1 qui peut être envisagé comme un véritable *nombre-de-fois* tant dans le calcul que dans l'heuristique de la procédure qui en découle.

Notons qu'en 1930, Vogel rapprochait cette introduction de l'inverse pour effectuer des divisions des techniques babyloniennes[77]. Mais, avec raison, quelques années plus tard, il ne soutenait plus cette hypothèse. En effet, alors que les scribes égyptiens pouvaient exprimer le résultat de la division entre deux expressions numériques, nous savons que les savants babyloniens ne pouvaient pas le faire. Ils étaient comme nous aujourd'hui, lorsque, dans notre système positionnel décimal, notre fraction 1/3 n'a pas d'écriture décimale finie :

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ 333\ 333\ 333 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il nous reste à émettre quelques hypothèses concernant l'obtention de cet inverse. Il est fort probable, que, de manière générale, les scribes pouvaient opérer en divisant 1 par l'expression numérique dont on veut calculer l'inverse :

[77] Vogel, 1930, Der Moskauer mathematische Papyrus, p. 455.

$$\bar{Q} = 1 : Q\,.$$

Mais alors nous pouvons nous interroger sur la pertinence de la considération de l'inverse du *quotient-de-proportion* puisque le scribe remplace une division par une double opération, à savoir, la division précitée suivie d'une multiplication par le résultat obtenu. Il semble alors que nous devons retenir les valeurs particulières du *quotient-de-proportion*. Elles sont de deux sortes : « élémentaires » dans le cas des rectangles et liées aux *expressions de 2 à partir d'un entier*, plus précisément, de 5, pour les triangles. La nature des polygones n'est pas en cause. En revanche, le fait que dans les problèmes M7 et M17, les *quotients-de-proportion* soient inverses l'un de l'autre laissent à penser que le scribe a utilisé l'expression classique du double de 1/5 pour fabriquer son problème. Plus généralement, nous pouvons avoir

$$Q = \frac{1}{2q+1} \times 2 \qquad \text{et} \qquad \bar{Q} = (2q+1) : 2 = (2q+1) \times \frac{1}{2} = q + \frac{1}{2}\,.$$

Une autre manière d'utiliser ce type d'expression ! En prenant comme valeur du *quotient-de-proportion* un nombre somme d'un entier et de 1/2, son inverse est le double de l'inverse de son double et, réciproquement, si le *quotient-de-proportion* est l'expression du double de l'inverse d'un nombre impair, alors son inverse est la moitié de ce nombre.

UNE PREMIÈRE PROCÉDURE

Aujourd'hui, après avoir ramené, par doublement, le cas d'un triangle rectangle à celui d'un rectangle, on peut considérer que les résolutions des problèmes UC 32162-1, M6 et M17 relèvent de la même procédure. Nous pouvons en déduire la formulation géométrique générale suivante de l'énoncé :

> Déterminer les dimensions d'un rectangle dont on connaît la mesure P de la superficie et le *nombre-de-fois* Q que la mesure de la largeur est celle de la longueur.

Nous avons les données suivantes :

	UC 32162-1	M6	M17
mesure de la superficie	12	12	40
quotient-de-proportion	1/2 1/4	1/2 1/4	1/3 1/15

Nous pouvons remarquer que le *quotient-de-proportion* est strictement inférieur à 1.

S'agissant d'un rectangle, algébriquement, nous pouvons noter L et l les mesures respectives de sa longueur et de sa largeur et tout le problème revient à déterminer ces dimensions connaissant leur produit P et leur quotient Q :

$$L \times l = P \quad \text{et} \quad l : L = Q \,.$$

En fait, nous devons écrire la donnée du *quotient-de-proportion* sous une forme multiplicative semblable au *nombre-de-fois* soit, puisque le quotient Q est strictement inférieur à 1 :

$$L \times l = P \quad \text{et} \quad l = L \times Q \,.$$

Une opération *a priori* insolite : le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*

Sous les formulations différentes des scribes, nos adaptations montrent, si besoin était, l'identité opératoire. Les scribes nous proposent d'effectuer une opération *a priori* insolite. En effet, elle revient à calculer l'inverse du *quotient-de-proportion* :

M6	UC 32162
ir.khér.èk ir.èk $2'$ $4'$ *èr gémèt ouâ khépér.khèr èm 1 3'* Tu feras ta manière de calculer, 2' 4' jusqu'à trouver un. Il adviendra : 1 3'. Tu diviseras 1 par 1/2 1/4. Il en résultera : 1 1/3.	*ir.kh[ér].èk pa* **$2'$ $4'$** *èr [gé]mèt ouâ khépérèt im pou zèp [***1 $3'$***]* Tu fe[r]as **ce $2'$ $4'$** jusqu'à [trou]ver un. De là, ce qu'il adviendra, c'est [**1 $3'$**] fois. Tu diviseras 1 par **1/2 1/4**. Il en résultera : **1 1/3** .
M17	
ir.khér.èk ir.èk 3' 15' èr gémèt 1 khépér.khèr zèp 2 2' Tu feras ta manière de calculer, 3' 15' jusqu'à trouver 1. Il adviendra 2 2' fois. Tu diviseras 1 par 1/3 1/15. Il en résultera 2 1/2.	

$$Q^{-1} = 1 : \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \bar{Q}\,.$$
$$Q^{-1} = 1 : \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right) = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \bar{Q}\,.$$

Or, théoriquement, ceci n'apporte rien de nouveau car ceci revient à permuter les deux nombres cherchés de telle sorte que nous en connaissons, comme dans le problème primitif, le produit et le quotient :

$$l \times L = P \quad \text{et} \quad L : l = \bar{Q}\,.$$

Autrement dit, comme nous l'avons dit auparavant, du point de vue algébrique d'aujourd'hui, la raison d'une telle pratique doit être trouvée ailleurs.

Il nous semble que nous devons alors prendre en compte la forme multiplicative, par exemple :

$$l \times L = P \quad \text{et} \quad L = l \times \bar{Q}\,.$$

Elle permet de mettre l'accent sur la différence fondamentale entre les deux situations. Primitivement la mesure de la largeur était un multiple inférieur à 1 de la mesure de la longueur. Maintenant, c'est la longueur qui est un multiple de la largeur et ce nombre est supérieur à 1. Il va pouvoir être considéré comme étant un « véritable » *nombre-de-fois*.

Le calcul du carré de la mesure de la longueur

La deuxième instruction consiste à multiplier la mesure de la superficie par l'inverse du *quotient-de-proportion*. En nous situant dans le cadre des mesures de superficie, ceci revient à multiplier une dimension par cet inverse. Or, dans ces exercices, nous venons de voir que la mesure de la longueur est égale à celle de la largeur multipliée par ce nombre. Autrement dit, en multipliant la largeur par ce nombre on obtient la longueur et le rectangle est transformé en un rectangle dont les dimensions sont toutes deux égales à la longueur, c'est-à-dire, en un carré dont la mesure du côté est celle de la longueur L du rectangle :

$$P \times \bar{Q} = (L \times l) \times (L : l) = L^2 \,.$$

En termes plus arithmétiques, nous pouvons dire, qu'implicitement, le scribe a calculé le carré de la mesure de la longueur du rectangle.

M6	**UC 32162**
i<r 12> pèn nét<y> èm sététy 1 3' [zèp] khépér.khèr 16 Fa<is> ce <12>, qui est la superficie, 1 1/3 [fois]. Il adviendra : 16. Multiplie ce **12**, qui est la superficie, par **1 1/3**. Il en résultera : **16**	*ir.khér.èk pa* **12** *zèp* **1 3′** *khépérèt im pou* **16** Tu feras ce **12**, **1 3′** fois. De là, ce qu'il adviendra, c'est **16**. Tu multiplieras ce **12** par **1 1/3**. De là, ce qu'il en résultera : **16**.
M17	
ir.khér.èk ir.èk 40 zèp 2 2' khépér.khèr 100 Tu feras ta manière de calculer, 40, 2 2' fois. Il adviendra 100. Tu multiplieras 40 par 2 1/2. Il en résultera 100.	

$$P \times \bar{Q} = 12 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 12 \times \frac{4}{3} = 4 \times 4 = 16 \,.$$
$$P \times \bar{Q} = 40 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 40 \times \frac{5}{2} = 20 \times 5 = 100 \,.$$

Il est évident qu'en considérant le *quotient-de-proportion* au lieu de son inverse, on aurait obtenu le carré dont la mesure du côté est celle de la largeur du rectangle donné :

$$P \times Q = (L \times l) \times (l : L) = l^2 \,.$$

Il nous semble que, pour mettre en jeu l'interprétation géométrique, le *nombre-de-fois* qu'une dimension est multiple de l'autre a pesé dans la balance. Il doit être supérieur à 1. Autrement dit, dans cette procédure, les scribes peuvent considérer qu'il est « nécessaire » de considérer l'inverse du *quotient-de-projection*.

Le calcul de la mesure de la longueur

Après avoir implicitement calculé le carré de la mesure de la longueur, il est naturel que le scribe extrait la racine carrée du résultat afin d'obtenir cette mesure :

$$\sqrt{P \times \bar{Q}} = \sqrt{L^2} = L \,.$$

<table>
<tr><th>M6</th><th>UC 32162</th></tr>
<tr><td><i>r.khé<r>.èk ir.èk qénébèt khépér.khèr 4 èn aou
Tu <feras> ta manière de calculer le « coin ». Il adviendra 4 pour la longueur
Tu extrairas sa racine carrée. Il en résultera 4 pour la longueur.</td><td>ir.khér.èk qénébét.éf èm 4

Tu feras son « coin » : 4.

Tu extrairas sa racine carrée : 4.</td></tr>
<tr><th colspan="2">M17</th></tr>
<tr><td colspan="2">ir.khér.èk ir.èk qénébét.ès khépér.khèr 10 mèk 10 pou èm aou
Tu feras ta manière de calculer son « coin ». Il adviendra 10. Vois ! C’est 10 en « longueur ».
Tu extrairas sa racine carrée. Il en résultera 10. Vois ! C’est 10 en hauteur.</td></tr>
</table>

$$\sqrt{P \times \bar{Q}} = \sqrt{16} = 4 \quad , \quad \sqrt{P \times \bar{Q}} = \sqrt{100} = 10\,.$$

Comme dans les documents hiératiques qui nous sont parvenus, les racines carrées qui doivent être calculées sont exactes. Nous ne savons pas comment les scribes peuvent obtenir ce type de résultat. Comme leurs collègues babyloniens, il se peut qu’ils disposent de tables de carrés et par suite de racines carrées. Mais il se peut aussi que nous disposions d’une preuve supplémentaire de la fabrication des énoncés à partir de leur solution. En revanche, dans les papyrus démotiques et ce, pour des problèmes semblables, nous trouvons des approximations de racines carrées. Les textes sont plus récents !

Le calcul de la mesure de la largeur

<table>
<tr><th>M6</th><th>UC 32162</th></tr>
<tr><td>2’ 4’èm 3 èn (ou)zékhou

2’ 4’ : 3, pour la largeur.

(Son) 1/2 1/4 : 3 pour la largeur.</td><td>ir.khér.èk 2′ 4′ èn 4 khépérèt im pou 3

Tu feras 2′ 4′ de 4. De là, c’est ce qu’il adviendra : 3.
Tu multiplieras 4 par 1/2 1/4. De là, ce qu’il en résultera : 3.</td></tr>
<tr><th colspan="2">M17</th></tr>
<tr><td colspan="2">ir.khér.èk ir.èk 3’ 15’èn 10 khépér.khèr 4 mèk 4 pou hèr (ou)zékhou
Tu feras ta manière de calculer, 3’ 15’ de 10. Il adviendra 4. Vois ! C’est 4 pour la « largeur ».
Tu multiplieras 10 par 1/3 1/15. Il en résultera 4. Vois ! C’est 4, pour la « largeur » !</td></tr>
</table>

La mesure L de la longueur étant connue ainsi que le *quotient-de-proportion*, le scribe peut en déduire immédiatement la mesure l de la largeur :

$$l = L \times Q\,.$$

Nous pouvons vérifier que :

$$L \times Q = \sqrt{P \times \bar{Q}} \times Q = \sqrt{L^2} \times (l : L) = L \times (l : L) = l\,.$$

$$l = \sqrt{P \times \bar{Q}} \times Q = 4 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{3}{4} = 3\,.$$
$$l = \sqrt{P \times \bar{Q}} \times Q = 10 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = 10 \times \frac{2}{5} = 2 \times 2 = 4\,.$$

Une fois de plus, les scribes multiplient des nombres entiers par des expressions fractionnaires et non pas l'inverse. Le *quotient-de-proportion* est bien un *nombre-de-fois* qui doit être considéré comme un multiplicateur, même si, ici, il est fractionnaire.

Il n'en demeure pas moins que les scribes n'utilisent pas la donnée du produit des mesures des deux dimensions qui conduirait à effectuer une opération beaucoup plus simple, à savoir, une division entre des nombres entiers. Il en est de même dans les papyrus démotiques mais les scribes s'en servent pour montrer la pertinence des approximations. Il nous semble que nous devons mettre en avant le cadre métrologique qui est sous-jacent. En utilisant le *quotient-de-proportion* les scribes sont assurés d'exprimer les mesures des dimensions avec la même unité de longueur. En revanche, en opérant à partir du produit, donc de la mesure donnée de la superficie du rectangle, l'unité de mesure de superficie n'est pas souvent précisée et, de plus, elle peut très bien différer du carré de la mesure de longueur avec laquelle est exprimée la largeur.

En guise de conclusion

Nous pouvons présenter l'algorithme commenté suivant :

Calcul des dimensions d'un rectangle			
Données	D_1 D_2	P $Q < 1$	Mesure de la superficie *Quotient-de-proportion*
(1)	$(D_2)^{-1}$	$1 : Q = \bar{Q}$	Calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*
(2)	$D_1 \times (1)$	$P \times \bar{Q} = L^2$	Calcul du carré de la mesure de la longueur
(3)	$\sqrt{(2)}$	$\sqrt{P \times \bar{Q}} = L$	Calcul de la mesure de la longueur
(4)	$(3) \times D_2$	$L \times Q = l$	Calcul de la mesure de la largeur

D'un point de vue théorique, cette procédure n'est pas la plus simple. En effet, d'une part, le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion* ne s'impose pas et, d'autre part, il est plus simple d’utiliser la donnée du produit, c’est-à-dire, ici, la mesure de la superficie, pour calculer la deuxième dimension. Mais c’est justement la détermination de cette dernière qui semble être à l’origine de la procédure car la donnée du *quotient-de-proportion* sous une forme multiplicative plus ou moins explicite, soit,

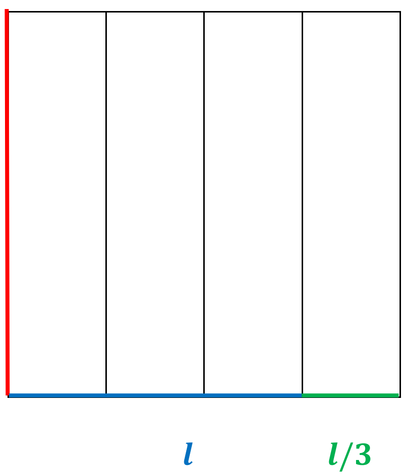
$$L \times Q = l\ ,$$

induit la connaissance de la mesure L de la longueur pour calculer celle de la largeur. Dès lors, c’est elle qui doit être déterminée en premier, d’où, semble-t-il, l’introduction de l’inverse du *quotient-de-proportion* et, par suite, le dernier calcul.

On peut noter que dans les trois problèmes concernés, UC 32162-1, M7 et M17, le *quotient-de-proportion* est strictement inférieur à 1, plus précisément, 1/3 1/15 en M17 et 1/2 1/4 en UC 32162-1 et M7. Ceci revient à donner la mesure de la plus petite dimension en fonction de la plus grande et, par suite, à pencher en faveur du calcul, en premier, de la plus grande dimension. Mais nous verrons que cette hypothèse ne peut être retenue pour le problème M7. En fait, dans les quatre exercices, le premier calcul est celui de la plus grande dimension. Est-ce une habitude administrative qui conduit, lors d’un partage à calculer d’abord la part de ceux qui en reçoivent la plus grande ? On ne prête qu’aux riches ! Mais nous pouvons envisager une autre hypothèse.

En effet, le problème UC 32162-1 commence par une première partie consacrée au partage d’une bande rectangulaire en rectangles égaux. Il se peut qu’à l’origine ceci concerne une bande rectangulaire particulière, à savoir celle d’un carré. Dès lors, on partagerait un carré en un certain nombre de rectangles égaux de telle sorte que ce nombre soit le *quotient-de-proportion* des rectangles partiels. Autrement dit, il s’agit alors de considérer le quotient de la mesure de la longueur à celle de la largeur, ce qui amène, d’une part, à le calculer s’il n’a pas été donné et, d’autre part, à « justifier » à partir du cas entier puis du cas fractionnaire, le fait utilisé par les scribes que le produit de la mesure de la superficie de chacun des rectangles partiels par ce quotient est la superficie du carré de départ, c’est-à-dire qu’il est égal au carré de la mesure de la longueur. Par exemple, en M6 nous avons

$$\boldsymbol{L} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) l = \boldsymbol{l} + \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{3}}$$



D’un point de vue arithmétique, les scribes calculent d’abord l’inverse $\bar{Q}$ du *quotient-de-proportion* et ils multiplient ensuite la mesure P de la superficie par cet inverse. Puisque le résultat est, ici, un nombre entier, un scribe pourrait l’obtenir assez facilement en divisant P par Q. Nous présentons les calculs afférents lors des commentaires des problèmes.

Toujours sur le plan opératoire, nous pouvons noter que les scribes effectuent deux multiplications qui sont d'un même type, à savoir, multiplication d'un nombre entier par une expression fractionnaire. Suivant une technique classique ceci revient à multiplier le nombre entier par chaque terme de l'expression. Dans le cas des quantièmes figurant dans l'expression ceci conduit à diviser l'entier par l'inverse de ce quantième. Il ne reste plus alors qu'à additionner les résultats partiels, ce qui ne présente pas des difficultés insurmontables pour un scribe égyptien. Théoriquement, nous savons qu'il n'en est plus de même si l'on choisit de multiplier une expression fractionnaire par un nombre entier car on doit effectuer des *doublements* successifs qui nécessitent la connaissance des expressions des doubles des quantièmes figurant dans le multiplicande. Autrement dit, pour ces multiplications, les scribes ont bien opéré.

UNE DEUXIÈME PROCÉDURE

Alors que dans les trois problèmes précédents les scribes utilisaient la même procédure, une autre technique est mise en œuvre en M7. En fait, elle revient à changer l'ordre des diverses opérations. Précédemment, l'inversion du *quotient-de-proportion* était effectuée au tout début de la résolution tandis qu'en M7, dans la démarche algorithmique, nous la trouvons en avant-dernière position. Est-ce parce que le *quotient-de-proportion* est supérieur à 1 ? Nous le pensons fortement et ce d'autant plus que c'est la procédure employée, beaucoup plus tard, dans les papyrus démotiques[78] pour des problèmes semblables où ce que nous nommons le *quotient-de-proportion* ou *nombre-de-fois* est aussi supérieur à 1. Comme pour la première procédure, ici, nous omettons le doublement de la mesure de la superficie afin de considérer seulement la partie relative à un rectangle.

Le calcul du carré de la mesure de la longueur

En M7, le *quotient-de-proportion* étant supérieur à 1, nous nous trouvons dans la même situation que lors de la deuxième étape de la première procédure que nous venons d'examiner et le scribe procède alors de la même manière en multipliant la mesure de la superficie par ce *quotient-de-proportion*. Arithmétiquement, il calcule ainsi le carré de la dimension la plus grande, celle de la longueur du rectangle :

$$P \times Q = (L \times l) \times (L : l) = L^2 .$$

khépér.khèr 40 ir zèp 2 <2'> khépér.<khèr 100>
Il adviendra 40. Fais 2 <2'> fois. Il advien<dra 100>
Il en résultera 40. Multiplie par 2 1/2. Il en résultera 100.

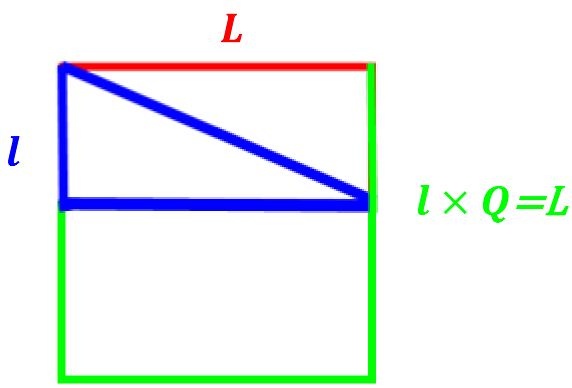
$$P \times Q = 40 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 40 \times \frac{5}{2} = 20 \times 5 = 100 .$$

Géométriquement, multiplier la mesure P de la superficie du rectangle par le nombre Q revient à obtenir, ici, la mesure de la superficie d'un rectangle de même longueur L que le rectangle donné et dont la mesure de la largeur est égale à Q fois celle de la largeur l du rectangle donné, donc à la mesure L de sa longueur. Autrement dit, nous situant dans un cadre géométrique, nous pouvons affirmer que le scribe a calculé la mesure de la superficie du carré ayant pour mesure de ses côtés celle de la longueur du rectangle donné.

$$P \times Q = (L \times l) \times Q = L \times (l \times Q) = L \times L = L^2$$

L'utilisation de l'expression multiplicative du *nombre-de-fois* au lieu du rapport classique des dimensions est ainsi plus en conformité avec les relations que nous avons écrites ci-dessus et permet, sans doute, de justifier l'heuristique qui a conduit à la procédure mise en œuvre par le scribe.

[78] Voir l'annexe « papyrus démotiques » en préparation.



Le calcul de la mesure de la longueur

Après avoir calculé le carré de la mesure de la plus grande dimension, il est naturel que le scribe extrait la racine carrée du résultat :

$$\sqrt{P \times Q} = \sqrt{L^2} = L\,.$$

<ir qénébèt khépér.khèr 1>0

<Fais le « coin ». Il adviendra 1>0.

Extrais sa racine carrée. Il en résultera 10.

Nous avons immédiatement

$$\sqrt{P \times Q} = L = \sqrt{100} = 10\,.$$

Une nouvelle fois la racine carrée est exacte et immédiate.

Une opération *a priori* insolite :
le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*

Connaissant le produit des deux dimensions et venant de calculer l'une d'elles, le scribe pourrait immédiatement en déduire l'autre en divisant le produit, entier donné, par la mesure, entière, qu'il vient de trouver, opération classique entre nombres entiers et conduisant, dans le cas particulier du problème M7, à un résultat entier :

$$P : L = (L \times l) : L = l = P : \sqrt{P \times Q} = 40 : 10 = 4.$$

Par ailleurs, puisque le *quotient-de-proportion* s'exprime simplement, le scribe pourrait aussi proposer d'effectuer la division de la mesure de la longueur par ce nombre :

$$L : Q = L : (L : l) = l = 10 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 4\,.$$

Mais, comme dans les autres exercices, il passe par le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion* :

$$Q^{-1} = 1 : Q = \bar{Q} .$$

Notons que

$$\bar{Q} = Q^{-1} = (L : l)^{-1} = \left(\frac{L}{l}\right)^{-1} = \frac{l}{L} = l : L .$$

nis ouâ khénèt 2 2' khépérèt <im p>ou 3' 15'
Exprime un à partir de 2 2'. <De là, ce> qu'il advient, c'est 3' 15'.
Inverse 2 1/2. Ce qui en résulte est 1/3 1/15.

$$Q^{-1} = 1 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \times 2 = 2 : 5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \bar{Q} .$$

Puisque 1/3 1/15 est l'expression classique du double du quantième 1/5, on peut penser que la considération de son inverse, à savoir, 2 1/2, n'est pas innocente. Le problème repose sur cette relation, que, de manière générale, nous pouvons formuler comme suit :

$$Q^{-1} = 1 : \left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \times 2 = 2 : (2n+1) .$$

Bien entendu, comme nous l'avons vu lors des *expressions de deux à partir d'un entier*, les résultats ne sont pas toujours très simples.

Le calcul de la mesure de la largeur

Puisque le scribe connaît la mesure de la longueur L et l'inverse du *quotient-de-proportion*, ici, le *nombre-de-fois* que la mesure de la longueur est celle de la largeur, il peut en déduire l'autre dimension :

$$L \times \bar{Q} = L \times (l : L) = l.$$

ir èn 10 khépér.khèr 4 10 pou èm aou èr 4 èm ouzékhou
Fais à 10. Il adviendra 4. C'est 10 en « longueur », pour 4 en « largeur ».
À 10, multiplie. Il en résulte 4. C'est 10, en « longueur », par 4, en « largeur ».

$$l = \bar{Q} \times L = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) \times 10 = 4 .$$

En soi, cette manière d'opérer interpelle. En effet, même en ne retenant pas le fait que le scribe n'utilise pas la valeur connue du produit, on pourrait penser qu'il n'aurait pas calculé l'inverse du *quotient-de-proportion*, opération qui est ici assez délicate et qu'il aurait préféré diviser la mesure de la plus grande dimension par ce *quotient-de-proportion* :

$$l = L : Q = 10 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 4\,.$$

Mais il faut croire que cette manière de procéder a perduré puisque nous la retrouvons dans les problèmes démotiques semblables. En fait, il semble que les scribes mettent en avant le *nombre-de-fois* qu'une dimension est un multiple de l'autre. Il se peut que le terme *idèb* (jdb) désigne le *nombre-de-fois* que la plus grande dimension est le multiple de l'autre, ce qui pourrait expliquer son absence lors des autres exercices.

En guise de conclusion

Le problème M7 du *Papyrus de Moscou* est résolu par une procédure distincte de celle qui est mise en œuvre dans les trois autres exercices considérés, mais utilisant les mêmes ingrédients et ce, dans un ordre différent. Il nous semble que la distinction fondamentale entre les divers énoncés concerne la valeur du *quotient-de-proportion*. Selon qu'il est inférieur ou supérieur à 1, c'est le premier ou le second algorithme qui doit être retenu.

Dans une première partie, les scribes déterminent la mesure de la plus grande dimension. Pour cela, ils doivent connaître le *nombre-de-fois* que la plus grande dimension L est un multiple de la plus petite, l. Lors de la seconde procédure, il fait partie des données. C'est la valeur du *quotient-de-proportion*, Q :

$$L = Q \times l\,.$$

Or multiplier une dimension par un nombre conduit à multiplier la mesure de la superficie du rectangle ayant ces dimensions par ce nombre et par suite, ici, à obtenir le carré dont la mesure du côté est la plus grande dimension.

$$P \times Q = (L \times l) \times Q = L \times (l \times Q) = L \times L = L^2\,.$$

Il ne reste plus qu'à extraire la racine carrée du résultat obtenu pour obtenir la valeur de la plus grande dimension.

Dans la deuxième partie, les scribes déterminent la mesure de la plus petite dimension. Raisonnant comme précédemment, ils doivent connaître le *nombre-de-fois* que la plus petite dimension l est un multiple de la plus grande, L. Lors de la seconde procédure, il ne fait pas partie des données. C'est la valeur de l'inverse $\bar{Q}$ du *quotient-de-proportion* :

$$l = L \times \bar{Q}\,.$$

Ils doivent donc calculer cet inverse. D'où finalement l'algorithme suivant lorsqu'on l'applique à un rectangle :

Calcul des dimensions d'un rectangle			
Données	D_1	P	Mesure de la superficie
	D_2	$Q > 1$	*Quotient-de-proportion*
(1)	$D_1 \times D_2$	$P \times Q = L^2$	Calcul du carré de la mesure de la longueur
(2)	$\sqrt{(1)}$	$\sqrt{P \times Q} = L$	Calcul de la mesure de la longueur
(3)	$(D_2)^{-1}$	$1 : Q = \bar{Q}$	Calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*
(4)	$(3) \times (2)$	$L \times \bar{Q} = l$	Calcul de la mesure de la largeur

D'un point de vue général, pour déterminer la plus petite dimension, nous pouvons mettre en regard les deux autres possibilités traduites par les égalités suivantes :

$$l = L : Q \qquad ou \qquad l = P : L\,.$$

Nous retrouvons ce que nous avons dit à propos de la première procédure. En particulier, puisque les nombres P, L et l sont des nombres entiers, la dernière opération est plus facile à effectuer que les deux autres. En fait, dans les textes démotiques semblables, les scribes suivront la même procédure et considéreront la mesure de la superficie seulement pour montrer la pertinence des approximations qu'ils ont commises.

Toutefois, comme pour la première procédure, nous pouvons mettre en avant le cadre métrologique plus ou moins bien précisé. Au besoin, les mesures des dimensions doivent être exprimées avec la même unité de longueur et l'unité de mesure de la superficie doit être le carré de cette unité de longueur. C'est sans doute dans cet ordre d'exigence que le scribe est amené à utiliser l'inverse du *quotient-de-proportion* sous la forme d'un *nombre-de-fois* et non pas à effectuer une division qui, dans ce cadre métrologique, n'a sans doute pas, à ses yeux, de signification.

UNE TROISIÈME PROCÉDURE ?

Comme nous l'avons dit précédemment, en son temps, à propos du *Fragment UC 32162*, Schack-Schackenburg parlait de *Regula falsi*. Si c'est le cas, les termes employés par le scribe nous conduisent alors à placer la méthode de fausse position susceptible d'être utilisée dans le domaine de l'implicite. En revanche, il nous semble que nous pouvons penser peut-être la retenir dans le cas du problème M17. La forme de l'énoncé ainsi que l'expression des résultats sont tout à fait particulières et peuvent permettre une association à une technique de fausse position que nous pouvons expliciter comme suit avec, toutefois, certains obstacles qui peuvent conduire à la rejeter. D'où notre interrogation.

Fausse position et énoncé

Rappelons l'adaptation que nous donnons de l'énoncé

De ce que tu mets pour la « longueur », tu dois en mettre 1/3 1/15 pour la « largeur ».

Ceci peut donner lieu à une technique par essais ou, de manière plus sophistiquée, à une méthode de fausse position. En effet, nous pouvons prendre comme fausse position, l'unité, c'est-à-dire, 1, pour la mesure de la « longueur ». Alors, la « largeur » mesure 1/3 1/15, bien sûr avec la même unité de mesure de longueur, soit, avec des notations « classiques »

$$L_0 = 1 \quad , \quad l_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} .$$

Ayant choisi 1 comme « unité », on en déduit immédiatement que la mesure R_0 de la superficie du rectangle associé est 1/3 1/15 :

$$R_0 = L_0 \times l_0 = 1 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} .$$

Or, si l'on multiplie les dimensions L et l du rectangle cherché par un même nombre k, on obtient un rectangle ayant la même forme. La mesure de la superficie R de ce rectangle sera le produit de celle du rectangle supposé, à savoir, R_0, par le carré du nombre k :

$$R = L \times l = (L_0 \times k) \times (l_0 \times k) = (L_0 \times l_0)(k \times k) = R_0 \times k^2 .$$

Par conséquent, pour parvenir à la mesure R de la superficie donnée, à savoir, 40, le nombre k sera égal à la racine carrée du quotient de R par R_0 :

$$k = \sqrt{R : R_0} = \sqrt{40 : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right)} = \sqrt{100} = 10 .$$

D'où

$$L = L_0 \times k = 1 \times 10 = 10 \quad et \quad l = l_0 \times k = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) \times 10 = 4 .$$

Ainsi, les nombres L et k sont égaux et le scribe peut s'exclamer « *Vois ! C'est ma « longueur* », insistant alors sur le caractère particulier de la situation. Mais nous allons voir qu'il proclame de même pour la « largeur », « *Vois ! c'est ma « largeur »* », tout en n'opérant pas par proportionnalité, ce qui affaiblit fortement l'hypothèse d'une technique de fausse position.

Division ou multiplication par l'inverse du diviseur

Toutefois, si nous voulons interpréter la solution proposée par le scribe sous la forme de l'utilisation de cette procédure de fausse position, nous devons considérer qu'au lieu de diviser R par R_0, le scribe préfère multiplier R par l'inverse de R_0

$$R : R_0 = R \times \frac{1}{R_0},$$

opération que nous avons, *a priori*, jugée insolite. Dans le domaine de la fausse position, elle l'est d'autant plus que nous ne pouvons pas parler de l'inversion du *quotient-de-proportion* et que $1/R_0$ n'a pas de signification particulière. Dès lors, nous avons seulement une pratique opératoire spécifique servant à la conduite des divisions semblable aux techniques babyloniennes. Toutefois, nous pouvons rappeler que l'obtention de l'expression de $1/R_0$ est immédiate si nous remarquons que R_0 est l'expression du double de 1/5, donc, que son inverse est la moitié de 5, c'est-à-dire, 2 1/2.

Calcul de l'autre dimension

Nous l'avons déjà dit, pour obtenir la mesure de la « largeur », le scribe n'opère pas par proportionnalité. En effet, il utilise la donnée du *quotient-de-proportion*, ce qui revient à écrire :

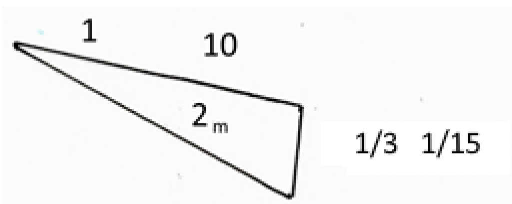
$$l = L \times Q = 10 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = 4\,.$$

En revanche, la proportionnalité utilisée pour appliquer la fausse position donne lieu aux égalités suivantes :

$$l = l_0 \times k = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) \times 10 = 4\,.$$

On voit bien la nécessité de distinguer, d'une part, multiplicateur et multiplicande et, d'autre part, la signification des nombres que l'on considère.

Un modeste examen de la figure

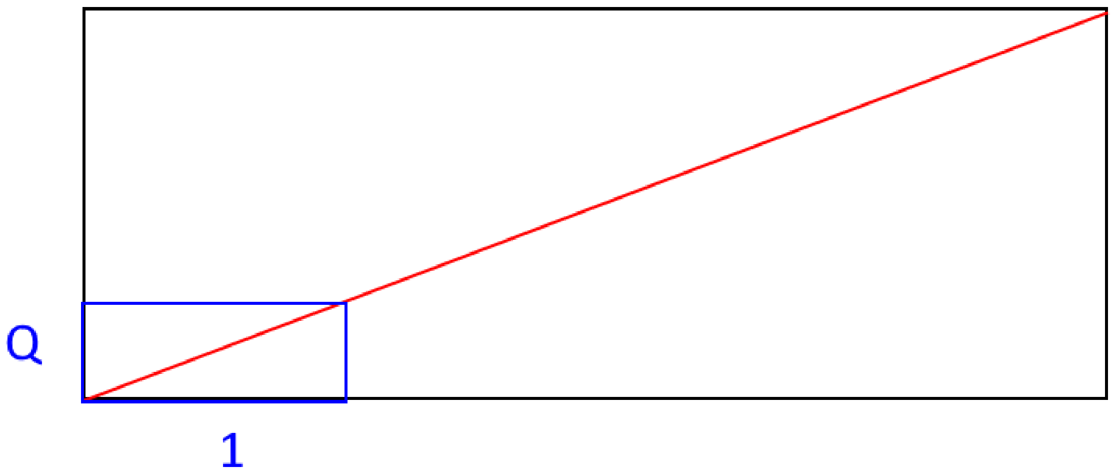


Après cet obstacle à l’utilisation d’une technique de fausse position, le scribe produit une figure qui, au contraire, renforce cette hypothèse. En effet, à la suite des nombres 1 et 1/3 1/15 qui peuvent être compris comme étant les mesures supposées d’un triangle ayant une forme correspondant au *quotient-de- proportion*, il écrit les mesures cherchées mettant ainsi en évidence la proportionnalité qui les lient :

$$\xrightarrow{\times 10}$$

1	10
1/3 1/15	4

Notons que, comme pour la forme des pyramides, l’*idb* (jdb) caractérise la forme des rectangles considérés et que la proportionnalité ci-dessus peut se représenter comme suit, les rectangles en noir et en bleu ont la même forme :



En guise de conclusion

Entre obstacle et mise en évidence de la proportionnalité par le dessin, nous laissons le lecteur se forger sa propre opinion. Toutefois, nous pouvons aussi remarquer qu’il est plus facile de multiplier 1/3 1/15 par 10 que de multiplier 10 par 1/3 1/15. Par conséquent, il se peut que la donnée du *quotient-de-proportion* ait incité le scribe à préférer la deuxième opération aux dépens de la première, gage de la fausse position. Autant dire qu’il est difficile de pencher pour cette heuristique à propos de la procédure suivie par le scribe.

Néanmoins, nous pouvons présenter l’algorithme commenté suivant ou, rappelons-le, la première instruction relève de l’implicite ce qui revient à voir le *quotient-de-proportion* sous la forme de la mesure de la superficie du rectangle dont les dimensions sont 1 et le *quotient-de-proportion* :

Calcul des dimensions d'un rectangle			
Données	D_1 D_2	P Q	Mesure de la superficie *Quotient-de-proportion*
(1)	$S[D_2]$	$1 \times Q = Q$	Mesure de la superficie du rectangle choisi
(2)	$[(1)]^{-1}$	$1 : Q = \bar{Q}$	Calcul de l'inverse de la mesure de la superficie
(3)	$D_1 \times (2)$	$P \times \bar{Q} = k^2$	Calcul du carré du *coefficient de proportionnalité*
(4)	$\sqrt{(3)}$	$\sqrt{P \times \bar{Q}} = k = L$	Calcul de la mesure d'une dimension
(5)	$(4) \times D_2$	$L \times Q = l$	Calcul de la mesure de l'autre dimension

En résumé, si nous voulons opter pour une méthode de fausse position nous devons remarquer que, tout d'abord, la première étape, à savoir, le choix de l'unité comme fausse position est implicite, ensuite, la considération de l'inverse du *quotient-de-proportion* doit être relié à une conduite particulière des divisions et enfin, le calcul de l'autre dimension n'est pas strictement effectué par proportionnalité car nous aurions préféré la multiplication de la valeur qui découle de la fausse position, à savoir, Q, par le coefficient de proportionnalité, k, soit encore la dimension qui vient d'être calculée :

$$l = Q \times k\,.$$

CONCLUSION

Chemin faisant, l'examen du *Fragment UC 32162-1 d'El-Lahoun* et des problèmes M6, M7 et M17 du *Papyrus de Moscou,* nous a amenés à nous interroger de nombreuses fois sur leur véritable nature et sur l'heuristique des solutions proposées laissant peut-être encore dans l'ombre quelques points. En soi, en termes d'aujourd'hui plus ou moins algébriques, le propos est clair. Il s'agit de déterminer deux nombres entiers dont on connait le produit et le quotient

$$x \times y = P \quad et \quad x : y = Q \,,$$

où P est un nombre entier et Q un nombre fractionnaire, à savoir, 1/2 1/4, 2 1/2 ou encore 1/3 1/15. La résolution peut être immédiate tout en nécessitant l'extraction d'une racine carrée :

$$x = Q\sqrt{P : Q} \quad , \quad y = \sqrt{P : Q} \,.$$

Ceci nous amène à penser que ces problèmes ont été fabriqués à partir de leur solution devenant ainsi un témoignage d'une activité mathématique certaine. Notons que nous ne trouvons pas trace de ce type d'exercices dans le *Papyrus Rhind* qui est pourtant le plus important document mathématique qui nous soit parvenu de l'Égypte ancienne.

Nous devons vite quitter ce cadre algébrique d'aujourd'hui pour nous situer dans le domaine de la géométrie où les scribes égyptiens situent ces problèmes. Ils savaient calculer la mesure de la superficie d'un rectangle ou d'un triangle lorsqu'ils connaissaient les mesures de leurs dimensions caractéristiques. Ici, il s'agit de résoudre un problème inverse : déterminer les mesures de leurs dimensions caractéristiques lorsque l'on connait leur quotient et la mesure de la superficie, soit, plus ou moins directement leur produit. En fait, les procédures que nous mettons en évidence ne tiennent pas compte de cet aspect arithmétique. Plus tard, dans les papyrus démotiques, les scribes égyptiens résoudront des problèmes semblables conduisant cette fois à des approximations de racines carrées et le produit sera alors seulement utilisé dans le cadre de la vérification des approximations effectuées. Pourtant, nous avons pu constater que la considération du produit aurait simplifié les procédures employées. En ce sens, nous ne pouvons pas dire qu'elles sont représentatives de l'Art égyptien du calcul.

Toutefois, ceci n'exclue pas des réflexions plus ou moins théoriques puisqu'en M7, le scribe nomme le nombre qui caractérise le quotient des dimensions. Comme pour le *séqèd* (sqd) qui définit la pente des pyramides, il emploie un terme spécifique, *idèb* (jdb). Nous parlons à ce propos de *quotient-de-proportion*, désirant ainsi mettre en évidence, d'une part, le quotient des mesures des dimensions et d'autre part, la proportion qui caractérise la forme d'un rectangle ou d'un triangle rectangle. En effet, bien que les algorithmes mis en œuvre puissent s'appliquer à un triangle quelconque, il nous semble que nous avons mis en évidence plusieurs indices (langage, écriture, forme) nous permettant d'affirmer que le scribe considère des triangles rectangles. Si, théoriquement, nous pouvons penser que ce quotient est établi par division, dans la pratique mathématique, il est utilisé sous sa forme multiplicative, à savoir, le *nombre-de-fois* que la mesure d'une dimension est multiple de la mesure de l'autre. En prenant son inverse comme outil fondamental, bien que les scribes égyptiens ne connaissent pas la notion abstraite de rapport, ils nous montrent qu'ils savent en utiliser une propriété très importante, l'inverse est le *nombre-de-fois* que l'autre dimension est multiple de la dimension considérée précédemment :

En UC 32162-1, le scribe prolonge ce regard « théorique » en insérant le problème dans un cadre pseudo-concret, celui du partage d'une bande rectangulaire en un nombre donné de rectangles égaux. Il est évident qu'aujourd'hui comme hier, nous pouvons réaliser un partage élémentaire selon la longueur de la bande. C'est effectivement ce découpage qui en résulte. Mais, afin de résoudre le problème inverse, seules la mesure de la superficie de la bande totale ainsi que le quotient des dimensions de chaque rectangle partiel sont données. Autre préoccupation pseudo-concrète, en M6, le scribe propose les mêmes données pour un tel rectangle sous la forme d'une sorte d'enclos rectangulaire.

Même si les procédures que nous avons retenues peuvent s'appliquer à un rectangle et un triangle quelconque, il n'en demeure pas moins que le *quotient-de-proportion* a des valeurs particulières. Pour les rectangles, nous pouvons dire qu'il est pythagoricien, en ce sens que les dimensions sont dans le quotient de 3 à 4 que l'on retrouve dans le triangle rectangle pythagoricien primitif, celui dont les mesures des côtés sont 3, 4 et 5 est celle de la diagonale. Mais cette qualification ne joue aucun rôle dans l'application de la procédure sauf à donner lieu à des opérations élémentaires. Quant aux triangles, les *quotients-de-proportion* sont inverses l'un de l'autre et ils sont reliés à l'expression égyptienne du double du quantième 1/5, à savoir, 1/3 1/15, autrement dit, sont dans un rapport de 2 à 5 ou de 5 à 2. Nous nous sommes placés dans ce cadre particulier, double de l'inverse d'un nombre premier, pour montrer que l'utilisation du produit au lieu de l'inverse du *quotient-de-proportion* donnait lieu à une solution « plus simple ».

Nous retenons deux types de procédure dont la différence semble être due à la valeur du *quotient-de-proportion* selon qu'elle est inférieure ou supérieure à 1. Il se peut que ceci soit lié à une heuristique géométrique de la solution nécessitant la connaissance ou la recherche du *nombre-de-fois* que la mesure de la longueur est multiple de celle de la largeur. En effet, si on utilise ce nombre comme multiple de la largeur du rectangle on obtient un nouveau rectangle, en fait un carré dont la mesure des côtés est celle de la longueur du rectangle initial, dont la superficie est ce multiple de la superficie de ce dernier. En fait, les scribes utilisent cette remarque en sens « inverse » : multiplier la superficie par *le nombre-de-fois* revient à multiplier la largeur par ce *nombre-de-fois* :

$$L = l \times Q \quad et \quad P \times Q = (L \times l) \times Q = L \times (l \times Q) = L \times L = L^2 \,.$$

Il semble aussi que des considérations métrologiques aient pu jouer un rôle dans la conduite des diverses résolutions. En effet, afin de faciliter les calculs, les dimensions doivent être exprimées avec la même unité de longueur et l'unité de superficie doit être le carré de cette unité de longueur. Bien que possible, ce serait plus compliqué si, par exemple, l'unité de longueur était, pour la longueur, le *khèt*, mais pour la largeur, la *coudée* et l'unité de superficie était la *coudée de terre* sous la forme abstraite *khèt-coudée*, superficie d'un rectangle de longueur 1 *khèt* et de largeur 1 *coudée*. Par exemple, si :

$$L = 200\ (kh\grave{e}t) \ , \quad l = 30\ (coud\acute{e}es) \ , \quad Q = \frac{L}{l} = \frac{200}{30} = \frac{20}{3} \ ,$$

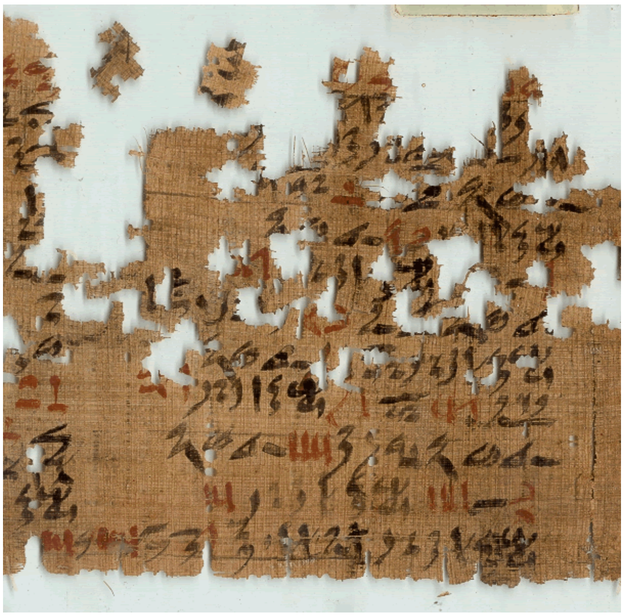
alors

$$P = 6000\ (coudées\ de\ terre) \quad , \quad P \times Q = 40000 = 200^2 = L^2\ .$$

Il ne semble pas que les scribes égyptiens aient envisagé cette généralisation, du moins dans les documents qui nous sont parvenus. Il n'en demeure pas moins que les textes que nous venons d'examiner montrent une réflexion mathématique certaine où la géométrie et la métrologie jouent un rôle certes implicite mais qui s'avère être important. Il en est de même pour des pratiques qui peuvent, aujourd'hui, être reliées à diverses propriétés des rapports, voir, par exemple, l'utilisation de l'inverse du *quotient-de-proportion* ou du *nombre-de-fois*.

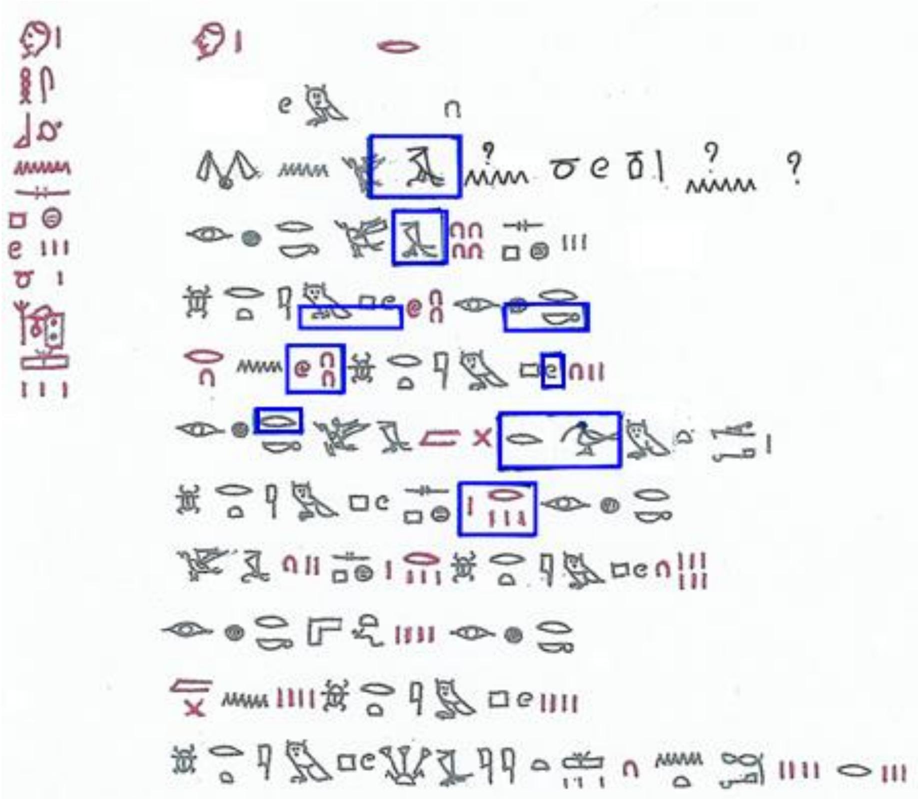
LE PROBLÈME UC 32162-1 D'EL-LAHOUN

REPRODUCTION PHOTOGRAPHIQUE



https://www.ucl.ac.uk/museums-static/digitalegypt/lahun/ucarchivelahun/uc32162b.gif

TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSCRIPTION SAVANTE

C0	tp-Hsb n zpw nw zSw
L1	tp [………] r […….]
L2	[..] w m […………] 10 [………]
L3	dmD n pa... ? … n...? …m?...
L4	jr.xr.k pA 40 zp 3
L5	xpr.t j[m pw] 120 jr.[xr].k
L6	10’ n [120] xpr.t jm p[w] 12
L7	jr.x[r].k pA 2′ 4′ [r g]m.t wa
L8	xpr.t jm pw zp [1 3′] jr.xr.k
L9	pA 12 zp 1 3′ xpr.t jm pw 16
L10	jr.xr.k qnb.t.f m 4 jr.xr.k
L11	2′ 4′ n 4 xpr.t jm pw 3
L12	xpr.t jm pw HAjj.t 10 n.t mH 4 r 3

TRANSCRIPTION VOCALISÉE

C_0 *tèp-hésèb èn zépou nou zéchou*
L_1 *tèp [… .....] èr [… ....]*
L_2 *[..] ou èm [………...] 10 [……...]*
L_3 *démèdj èn pa... ?... èn... ? ... èm?...*
L_4 *ir.khér.èk pa 40 zèp 3*
L_5 *khépérèt i[m pou] 120 ir.[khér].èk*
L_6 *10’ èn [120] khépérèt im p[ou] 12*
L_7 *ir.kh[ér].èk pa 2′ 4′ [èr gé]mèt ouâ*
L_8 *khépérèt im pou zèp [1 3′] ir.khér.èk*
L_9 *pa 12 zèp 1 3′ khépérèt im pou 16*
L_{10} *ir.khér.èk qénébét.èf èm 4 ir.khér.èk*
L_{11} *2′ 4′ èn 4 khépérèt im pou 3*
L_{12} *khépérèt im pou hayt 10 nèt méh 4 èr 3*

TRANSCRIPTION VOCALISÉE INDEXÉE

C_0 [1] tèp$_1$-hésèb$_1$ èn zépou nou zéchou
L_1 [2] tèp [………….] èr [………..]
L_2 [3] [..] ou èm […………] 10 [………]
L_3 [4] démèdj èn pa... ?... èn... ? ... èm?...
L_4 ir.khér.èk pa[5] 40 zèp 3
L_5 khépérèt i[m pou][6] 120 ir.[khér][7].èk[8]
L_6 10’[9] èn [120][10] khépérèt[11] im p[ou][12] 12
L_7 ir.kh[ér][13].èk pa 2′ 4′ [èr gé][14]mèt ouâ
L_8 khépérèt im pou zèp [1 3′][15] ir.khér.èk
L_9 pa 12 zèp 1 3′ khépérèt im pou 16
L_{10} ir.khér.èk qénébét.èf èm 4 ir.khér.èk
L_{11} 2′ 4′ èn 4 khépérèt im pou 3
L_{12} khépérèt im pou hayt 10 nèt méh 4 èr 3

1 — En introduction du *Fragment UC 32162*, la colonne **C_0** est écrite verticalement et en rouge.

2 — Les deux premières lignes du problème UC 32162-1 sont très lacunaires. Même si Sylvia Couchoud[79] a donné une interprétation que nous pouvons retenir, il est difficile d'en restituer le texte. Pour **L_1** les signes que nous pouvons discerner sont écrits en rouge. Sans doute, ils font partie de l'introduction du problème : *tèp* (tp) soit, *exemple de* mais il est plus présomptueux de vouloir donner une signification certaine au signe de la bouche que nous lisons dans un autre fragment, lecture seulement retenue par Annette Imhausen et James Ritter[80].

3 — Il en est de même pour la deuxième ligne. Bien qu'écrite en noir elle doit faire partie de l'énoncé. Nous lisons avec certitude la « lettre » m et, dans un deuxième « fragment », le chiffre 10. Compte tenu du déroulé du problème on peut considérer qu'il s'agit de l'énoncé relatif à 10 bandes. Comme l'ont transcrit A. Imhausen et J. Ritter, la « lettre » m est sans doute précédée du signe de la spirale.

4 — Bien que plus complète la troisième ligne du problème UC 32162-1 a reçu au cours du temps diverses transcriptions. Le premier éditeur, Francis Griffith[81], transcrit de nombreux signes qui le conduisent à traduire « *of the henu* » ce qui amène Hans Schack-Schackenburg[82], Olivier Gillain[83], Richard Gillings[84] et Walter Reineke[85] à voir dans cet exercice des calculs relatifs à des capacités. Bien qu'elle fournisse une explication fort plausible du problème, S. Couchoud ne transcrit pas cette ligne. A. Imhausen[86] se risque à proposer le signe de la totalité et la « lettre » m. Lors de l'édition récente des *Fragments mathématiques d'El-Lahoun*, associée avec J. Ritter, elle lit *èn pa* (n pA). Autant dire qu'il est difficile de donner une transcription qui fasse autorité. Pourtant, *a priori*, la ligne comporte de nombreuses marques qui pourraient donner lieu à une restitution assez proche de l'interprétation donnée par S. Couchoud. Essayons de préciser :

79 Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 250. Pour des références plus complètes, voir la bibliographie en fin d'étude. Sauf pour les citations, nous nous bornons à une brève indication lors de la première occurrence.

80 Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments, p. 79.

81 Griffith, 1898, *The Petrie Papyri, Hieratic Papyri from Kahun and Gurob*.

82 Schack-Schackenburg, 1900, Der Berliner Papyrus 6619.

83 Gillain, 1927, *La science égyptienne, l'arithmétique au Moyen Empire*.

84 Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*.

85 Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter*.

86 Imhausen, 2003_1, *Ägyptische Algorithmen*.

D'après Georg Möller[87], le signe W24 du bol (495) sous la forme d'un 3 est assez rare. Elle ressemble le plus souvent au W22 (497).

1/ Pour la première marque, en son temps, A. Imhausen avait lu le signe des deux fanions croisés (S23 dans la classification de Gardiner) qui est rendu par *démèdj* (dmD) signifiant *total*. Mais avec son collègue J. Ritter elle a préféré le signe de la colonne vertébrale (F40 dans la même classification). Les deux signes diffèrent fortement, le premier ressemblant à un M tandis que c'est la lettre H pour le second. Il nous semble que, comme Marianne Michel[88], nous devons retenir le premier signe bien que le second puisse être rattaché à la longueur implicitement utilisée dans l'énoncé du problème.
2/ La marque suivante est un trait horizontal rendu habituellement par *èn* (n). On a un génitif indirect qui se lie naturellement à *pa* (pA) qui est un adjectif démonstratif masculin en égyptien devant ici s'appliquer au terme principal du problème. Ces deux lectures ont été retenues par Griffith, W. Reineke, A. Imhausen et J. Ritter. On peut subodorer à la suite le complément phonétique *a* (A) qui accompagne toujours le bilitère *pa* (pA).
3/ Plus loin, un deuxième *èn* (n) peut avoir deux statuts, soit la finale du mot qui pose problème, soit un mot de liaison pouvant être un génitif indirect mais aussi la préposition « pour». Le cas d'un datif étant peu probable.
4/ *èm* (m) a été retenu par M. Michel. Elle traduit le mot par « égale » avec un point d'interrogation. Il est certain que les sens à donner sont divers depuis la « partition » jusqu'à définir une situation de lieu avec la préposition « dans ». Mais à la suite de ce *èm* (m) il y a un signe vertical pour lequel nous n'avons pas de solution. Ce passage est lié à l'interrogation qui suit.
5/ le mot *hénou* (hnw) qui est une unité pour les capacités liquides a été retenu par Griffith, W. Reineke, Gillings et Marshall Clagett[89]. Force est de constater que cette lecture est tentante mais en admettant qu'elle soit juste, il est illusoire de vouloir la rapprocher du reste du discours.
6/ En fin de ligne, après une lacune se trouve un signe en forme de boucle ouverte vers la gauche pour lequel nous n'avons pas de solution.

[87] Möller, 1909 (1965), *Hieratische Paläographie*.
[88] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*.
[89] Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book*, Volume Three.

5 — Les lignes **L_4** à **L_8** comportent quelques lacunes. Si l'on tient compte des diverses expressions employées par le scribe ou de la solution qu'il propose, nous pouvons les combler facilement. Néanmoins, les commentateurs ne sont pas tous d'accord sur les manques. Ceci tient essentiellement à l'importance qu'ils accordent aux marques qui subsistent. Ici, Griffith ne signale pas la lacune qui pourtant précède le chiffre 40 écrit en rouge. *A contrario*, S. Couchoud englobe *pa* (pA) et 40 dans ce manque. Dans leurs transcriptions hiéroglyphiques, A. Imhausen et M Michel considèrent seulement que la « lettre » *a* (A) est dans la lacune. Nous les avons suivies. Notons que seul le signe du canard en vol aux ailes déployées (G40 dans la classification de Gardiner) est présent. Ayant *pa* (pA) comme valeur phonétique ceci en justifie la restitution. Par ailleurs, nous sommes tout à fait dans la lignée de l'utilisation de l'expression *ir.khér.èk pa N* (jr.xr.k pA N) par le scribe lorsqu'il désire indiquer qu'il faut *opérer à partir de ce nombre N*.

6 — La restitution est de la même veine. Nous avons cette fois l'expression classique *khépérèt im pou* (xpr.t jm pw) utilisée par le scribe. Les trois derniers signes sont plus ou moins présents d'où des différences entre les divers commentateurs.

7 — La ligature transcrite *khér* (xr) est partiellement visible ce qui peut conduire à ne pas la retenir. C'est ce que font les divers commentateurs.

8 — Alors qu'ailleurs le scribe utilise la formulation *ir.khér.èk pa E* (jr.xr.k pA E), ici, nous sommes en fin de ligne et il n'écrit pas le terme *pa* (pA) puisque la ligne suivante commence par le nombre 10'. Nous pouvons penser que nous sommes dans un cadre particulier où il s'agit de prendre 1/10 de 120 et non pas de multiplier 120 par 1/10. D'où notre adaptation.

9 — Le quantième 10' est partiellement visible. Dans sa thèse A. Imhausen a retenu seulement le nombre 10 mais, avec son collègue J. Ritter elle a rétabli le quantième.

10 — Les avis sont partagés pour considérer que dans la lacune le scribe avait écrit *pa 120* (pA 120) ou le seul signe numérique 120. Il semble que, d'une part, le scribe n'a pas tracé un signe au-dessus de la « lettre » *n* (n) et que, d'autre part, 120 suffise à compléter la lacune.

11 — Seule la « lettre » r est manquante de telle sorte qu'il peut être inutile d'effectuer une restitution lors de nos transcriptions savantes ou vocalisées. C'est l'attitude adoptée par S. Couchoud et A. Imhausen.

12 — La « lettre » *ou* (w) est omise. Notons que S. Couchoud a sans doute commis une faute d'impression en mettant dans la lacune le nombre 12 en lieu et place de cette « lettre ».

13 — La restitution *ir.khér.èk pa* $2'$ $4'$ (jr.xr.k pA $2'$ $4'$) est sûre. Mais les divers commentateurs ne sont pas d'accord sur les signes qu'ils mettent dans la lacune. Il nous semble que seule la « lettre » A doit y figurer. Comme il arrive souvent, nous pouvons attribuer à une faute d'impression l'inclusion de l'expression numérique qui est pourtant bien visible.

14 — Curieusement A. Imhausen et M. Michel mettent $2'$ $4'$ dans la lacune. Mais ceci est corrigé dans l'édition des *Fragments*.

15 — Nous considérons que le résultat, à savoir, 1 3', est dans la lacune mais Griffith, S. Couchoud, A. Imhausen et son collègue J. Ritter n'ont pas la même opinion.

TRADUCTION

//$_0$ Bon[1] exemple[2] des pratiques[3] des scribes[4].

//$_1$ Exemple [………….] par [………..]

//$_2$ [..] en ? […………] 10 [………]

//$_3$ Total de ce (cette) ?...de (pour ?)…en (dans ?) ...

//$_4$ Tu feras ce[5] 40, 3 fois. //$_{5a}$ De là, [ce qu']il advien[dra][6], c'est 120.

//$_{5b}$ Tu feras //$_6$ 10' de [120][7]. De là, ce qu'il advien[dra], c'est 12.

//$_7$ Tu fe[r]as ce 2′ 4′ [jusqu'à trou]ver un[8].

//$_{8a}$ De là, ce qu'il adviendra, c'est [1 3′] fois.

//$_{8b}$ Tu feras //$_9$ ce 12, 1 3′ fois. De là, ce qu'il adviendra, c'est 16.

//$_{10a}$ Tu feras son « coin »[9] : 4.

//$_{10b}$ Tu feras //$_{11}$ 2′ 4′ de 4[7]. De là, ce qu'il adviendra, c'est 3.

//$_{12}$ De là, c'est ce qu'il adviendra, ce sont ses 10 bandes rectangulaires[10] de 4 *coudées* par 3.

1 — Puisque l'introduction du UC 32162 commence par la même expression que celle du *Papyrus Rhind*, à savoir, *tèp-hésèb* (tp-Hsb), nous pouvons reprendre ce que nous avons écrit à ce propos. Le terme *hésèb* (Hsb) reçoit plusieurs acceptions liées aux comptes, aux calculs ou encore à l'exactitude de ceux-ci. Dans l'expression *tèp*$_{1}$*-hésèb*$_{1}$ (tp$_1$-Hsb$_1$) nous avons retenu ce dernier aspect. La véracité du compte devant avoir une valeur exemplaire et pédagogique comme résultat des vertus tant morales qu'intellectuelles du scribe qui les met en œuvre, les notions de compte et d'exactitude se confondent d'où, par exemple, certaines traductions proposées mettant en avant cette correction lorsque l'on associe *hésèb* (Hsb) à *tèp* (tp). C'est ainsi que Sir Alan Gardiner[90] traduit *tèp-hésèb* (tp-Hsb) par *right calculation, right order*. Reprenant une idée formulée parmi d'autres par Griffith[91], nous pensons qu'il convient de traduire *tèp*$_{1}$*-hésèb*$_{1}$ (tp$_1$-Hsb$_1$) par **bon exemple** comme nous parlons d'un bon travail ou d'un bon résultat.

2 — Le terme *tèp*$_{1}$ (tp$_1$) est associé à *hésèb*$_{1}$ (Hsb$_1$). Dans le *Papyrus Rhind*, comme dans le *Fragment d'El-Lahoun UC 32162*, l'expression *tèp*$_{1}$*-hésèb*$_{1}$ (tp$_1$-Hsb$_1$) figure au début du document ce qui donne à *tèp*$_{1}$ (tp$_1$) une signification particulière. Il ne s'agit pas, comme certains auteurs le pensent un peu trop rapidement, de règles à suivre ou de méthodes à appliquer obligatoirement mais plutôt d'un **exemple**, d'une présentation d'éléments servant à illustrer le projet du scribe.

3 — Comme pour le *Papyrus Rhind*, l'introduction générale ne vise pas un problème particulier. Au lieu des secrets à percer, en employant le terme pluriel *zépou* (zpw) le scribe met l'accent sur la répétition. En forçant le trait, aujourd'hui, nous pourrions parler d'algorithmes. Nous nous sommes limités à préférer **pratiques**.

[90] Gardiner, 1957, *Egyptian Grammar*, p.582.
[91] Griffith, 1891$_4$, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 27.

4 — En traçant le signe de la palette de scribe (Y3 dans la classification de Gardiner) le rédacteur insiste sur l'écrit et même sur les **pratiques des scribes**.

5 — Pour formuler une instruction, comme dans le *Papyrus Rhind*, en $R62_6$ et en $R74_3$, le scribe utilise l'expression *ir.khér.èk pa* E (jr.xr.k pA *E*) que nous traduisons par « tu feras ce E » insistant ainsi sur le nombre particulier *E*.

6 — Nous trouvons l'expression *khépérèt im pou* (xpr.t jm pw) onze fois dans les *Fragments d'El-Lahoun* alors qu'Âhmès ne l'emploie que deux fois dans le *Papyrus Rhind*, en $R76_4$ et en $R78_3$. Les scribes l'utilisent pour indiquer l'obtention d'un résultat. Ceci donne lieu à diverses acceptions tant pour la traduction du verbe que pour sa forme verbale et bien sûr, aussi, les autres termes. Nous avons conservé le verbe advenir au futur comme l'instruction qui précède. **De là, ce qui adviendra, c'est *E***. Mais, pour l'adaptation, nous avons préféré insister sur l'obtention du résultat, il en résultera : *E*.

7 — Par deux fois, avec les expressions numériques 1/10 et 1/2 1/4, qui sont fractionnaires et plus petites que 1, le scribe change la formulation relative à une multiplication par cette expression : il ne peut pas parler de « fois » comme lorsque nous disons « tu feras la moitié de 4 » au lieu de « une demie fois 4 ». **Tu feras *E* de *F***.

8 — D'un point de vue opérationnel, le scribe demande de calculer l'inverse d'une expression numérique. Il emploie à cette occasion l'écriture littérale du chiffre 1 qui peut désigner aussi l'unité. Seule, dans sa thèse, A. Imhausen met en évidence cette spécificité. La plupart des commentateurs considèrent la simple division de 1. Nous avons retenu l'expression classique de cette opération et le caractère littéral **un** dans notre traduction tout en optant pour la division de 1 lors de notre adaptation.

9 — Pour signifier la racine carrée, les scribes égyptiens utilisent le signe des deux murs à angle droit (O38 dans la classification de Gardiner) qui a pour valeur phonétique qnb que l'on retrouve dans le terme *qénébéty* (qnb.tjj) qui désigne le magistrat, celui qui se tient dans l'angle, dans le coin. Nous avons retenu cette dernière acception **« coin »** lors de notre traduction, mais nous sommes revenus à la classique racine carrée dans notre adaptation.

10 — Le terme *hayt* (HAjj.t) figure dans le *Papyrus de Berlin 6619* et dans le *Fragment UC 32162 d'El-Lahoun*. Comme l'a fait remarquer S. Couchoud, avec le déterminatif de l'étoffe frangée (S28 de la classification de Gardiner), il est associé au bandage, au pansement. Dans les problèmes concernés, le déterminatif est plus abstrait (rouleau de papyrus et traits du pluriel). Il peut alors désigner une **bande rectangulaire** qui peut être un lopin de terre ou une bande de tissu qui mesure 4 *coudées* de long et 3 *coudées* de large. Mais, dans le texte qui nous est parvenu, il n'y a aucune référence aux termes classiques pour désigner un rectangle, sa longueur ou sa largeur : les « *bandes sont de 4 coudées par 3* ». Nous savons que certaines unités de superficie concernent des bandes : *coudée de terre* (bande rectangulaire de 100 *coudées* par 1 *coudée*) et *millier de terre* (mille *coudées de terre* soit une bande rectangulaire de 1000 *coudées* par 100 *coudées*). Si une *coudée de terre* représente la superficie d'un carré de 10 *coudées* de côté, le *millier de terre* ne peut pas être associé à un carré dont la mesure du côté serait un nombre rationnel de *coudées* : c'est véritablement une bande dont les extrémités sont « naturelles », la bande est rectangulaire.

ADAPTATION

[*10 bandes rectangulaires de mêmes dimensions, leur largeur étant 1/2 1/4 de leur longueur, sont rassemblées en une bande rectangulaire de 40 coudées de long et 3 coudées de large*].

Tu multiplieras ce 40 par 3. Il en résultera : 120.

Tu prendras 1/10 de ce 120. Il en résultera : 12.

Tu diviseras 1 par 1/2 1/4. Il en résultera : 1 1/3 .

Tu multiplieras ce 12 par 1 1/3. Il en résultera : 16.

Tu extrairas sa racine carrée : 4.

Tu multiplieras 4 par 1/2 1/4. Il en résultera : 3.

Il en résultera : 10 bandes rectangulaires de 4 *coudées* par 3.

COMMENTAIRE

L'introduction générale

Bon exemple des pratiques des scribes.

Quatre termes scandent cette introduction qui ressemble à celle du *Papyrus Rhind* : *tèp* (tp), *hésèb* (Hsb), *zépou* (zpw) et *zéchou* (zSw) qui donnent lieu à diverses acceptions. Dans nos notes de la traduction, nous avons essayé de justifier nos choix. Souvent, les commentateurs insistent sur les méthodes, les comptes quand ce n'est pas la comptabilité elle-même qui est retenue. Certes, le deuxième exercice traite de redevances mais le premier est un véritable problème mathématique même si, dans une première partie, l'auteur a sans doute voulu se situer dans ce qui peut ressembler à un partage de terrains ou comme dans le *Papyrus démotique J.E. 89127-30 du Musée du Caire*[92], la confection d'une voile de bateau à partir de bandes de toile rectangulaires. En fait, nous allons voir que la procédure suivie dans la deuxième partie n'est pas, ici, obligatoire. En d'autres occasions, comme dans certains problèmes du *Papyrus de Moscou* elle sera plus appropriée. Par ailleurs, nous verrons que les rectangles partiels qui sont considérés sont tout à fait particuliers : le quotient des mesures des côtés que nous nommons *quotient-de-proportion*, est « pythagoricien », c'est celui de 3 à 4. On le retrouve dans le *Fragment 6619 de Berlin* ainsi que dans le problème M6 du *Papyrus de Moscou*. Autant dire que les problèmes de ce type ont été fabriqués pour effectuer un travail mathématique éloigné de la comptabilité usuelle. D'ailleurs, de manière générale, la superficie d'un rectangle est déterminée à partir de la connaissance de la mesure de ses côtés. Ici, il s'agit du problème inverse, fort éloigné de la vie quotidienne.

Une première partie introductive

[*10 bandes rectangulaires de mêmes dimensions, leur largeur étant 1/2 1/4 de leur longueur, sont rassemblées en une bande rectangulaire de 40 coudées de long et 3 coudées de large*].

Tu multiplieras ce 40 par 3. Il en résultera : 120.

Tu prendras 1/10 de 120. Il en résultera : 12.

Après l'introduction générale, nous pouvons découper le texte en quatre parties. Tout d'abord, l'énoncé qui est presque manquant, puis une première partie de la solution qui sert de préparation au sous-problème traité en seconde partie et enfin une conclusion. C'est en utilisant tout cet ensemble que nous pouvons reconstruire l'énoncé.

Croyant voir dans un des signes des premières lignes le terme *hénou* (hnw), Griffith avait opté pour une entrée en matière liée aux capacités. Cette hypothèse semble devoir être abandonnée au profit de diverses surfaces, sans doute rectangulaires, comme l'a fort bien montré S. Couchoud. En effet, en conclusion, nous avons « 10 *hayt* de 4 *coudées* par 3 (*coudées*) ». N'ayant que deux dimensions, nous pouvons raisonnablement penser à 10 bandes rectangulaires dont les mesures respectives, en *coudées*, de la longueur et de la largeur, sont 4 et 3. Nous avons donc 10 rectangles de 12 *coudées carrées* de superficie, soit

[92] Parker, 1972, *Demotic Mathematical Papyri*, problème D7, pp. 18-19.

une superficie totale de l'ensemble égale à 120 *coudées carrées*, ce qui explique le nombre 120 que l'on trouve au début de la résolution et aussi la considération du 1/10 afin de déterminer la mesure égale à 12 de la superficie d'un rectangle partiel. Dès lors, comme 120 est le résultat de la multiplication de 40 par 3, nous devons aussi considérer que ces 10 bandes partielles, si elles étaient mises bout à bout constitueraient une bande rectangulaire de départ ayant pour dimensions 40 coudées et 3 coudées. Autrement dit, nous pouvons envisager le partage d'un tel rectangle en 10 rectangles tous égaux. Ici encore, puisque les rectangles partiels ont 4 comme mesure de longueur, il est naturel de considérer un rectangle dont la mesure de la longueur est 10 fois plus grande, soit 40 et celle de la largeur la même que celle des rectangles partiels, soit 3. Nous avons ainsi une bande rectangulaire partagée en 10 :

	4	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**3**
						40					

Mais cette présentation peut donner lieu à une solution immédiate. En effet, nous avons 10 rectangles partiels et leur mise bout à bout doit donner lieu au fait qu'une de ses dimensions soit un multiple de 10. Or, ici, c'est 40, dont une des dimensions de chacun des rectangles parties est 4 et l'autre est égale à l'autre dimension du rectangle total, soit 3.

Il semble donc que nous devons nous appuyer sur le terme *démèdj* (dmD) que nous lisons en début de la troisième ligne et proposer un autre rassemblement et, bien sûr, d'autres données. Le rectangle total aurait alors, par exemple, pour dimensions **20** et **6** qui pourraient donner lieu à la même résolution.

	4	**4**	**4**	**4**	**4**	
3	1	2	3	4	5	**6**
3	6	7	8	9	10	
			20			

Dans tous les cas, il ne reste plus qu'à considérer l'expression numérique que nous lisons après, à savoir, $1/2\ \ 1/4$ comme étant une donnée supplémentaire. La fin de la résolution nous montre que c'est le quotient de 3 à 4, c'est-à-dire le quotient des mesures des rectangles partiels, celui de la mesure de leur largeur par celle de leur longueur. Autrement dit, nous pouvons supposer que le problème posé revient à celui du

> Rassemblement de 10 rectangles partiels égaux dont la mesure, en *coudées*, de la largeur, est $1/2\ \ 1/4$ de la mesure, en *coudées*, de la longueur, en un rectangle de 40 *coudées* par 3 *coudées*.

Nous pouvons donc considérer que nous avons les données suivantes pour des rectangles dont les dimensions sont exprimées en *coudées* et leur superficie en *coudées carrées* :

mesure, en *coudées*, de la longueur du « rectangle total » : $L' = 40$,
mesure, en *coudées*, de la largeur du « rectangle total » : $l' = 3$,

nombre de rectangles partiels : $n = 10$,
quotient-de-proportion Q des dimensions des rectangles partiels :

$$l = L \times Q = L \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \quad , \quad Q = l : L = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} .$$

En nous appuyant sur la résolution proposée par le scribe, nous pouvons en distinguer les diverses étapes.

Calcul de la mesure de la superficie, en *coudées carrées*, du rectangle à partager

Tu multiplieras ce 40 par 3. Il en résultera : 120.

En fin d'exercice, nous apprenons que le scribe considère la *coudée* comme unité de longueur et que le partage donne lieu à 10 bandes rectangulaires partielles de 4 *coudées* par 3. Par conséquent, chaque bande partielle a une superficie égale à 12 *coudées carrées*. Les égyptologues utilisent cette notion moderne d'unité au carré bien qu'ils ne disposent pas de terme égyptien pour désigner une *coudée carrée*. Pourtant, nous avons peut-être, ici, le témoignage de la considération de cette unité. En effet, la mesure de la superficie totale S à partager est 10 fois celle de chaque bande, soit 120 *coudées carrées* et c'est ce nombre que le scribe commence à calculer à partir des mesures des dimensions que nous avons mises en évidence, à savoir, 40 et 3 :

$$S = 40 \times 3 = 120 .$$

Or, pour 120 *coudées carrées,* il écrit, de manière classique, les chiffres100 et 20. Mais, il aurait pu tout aussi bien considérer la *coudée de terre* qui vaut 100 *coudées carrées*. En outre, ce n'est sans doute pas un hasard si le nombre de bandes est égal à 10. En retenant 120 on facilite les calculs ultérieurs. Autrement dit, le scribe a implicitement raisonné en *coudées carrées*. Nous en verrons aussi la nécessité lorsqu'il obtiendra les mesures, en *coudées*, des dimensions de chaque bande.

En fait, en incluant cette première partie, le scribe met en évidence les deux problèmes principaux : d'une part, le calcul de la superficie d'un rectangle dont on connaît la mesure de ses dimensions et, d'autre part, le problème inverse, à savoir, celui de la détermination des mesures des dimensions d'un rectangle pour lequel la mesure de sa superficie et le quotient des mesures de ses dimensions exprimées avec la même unité de mesure que nous appelons *quotient-de-proportion*, sont données. Nous verrons aussi qu'il se peut que cette première partie soit un prélude pour la compréhension de la procédure suivie dans la deuxième partie.

Calcul de la mesure de la superficie, en *coudées carrées*, de chaque rectangle partiel

Tu prendras $1/10$ de ce 120. Il en résultera : 12.

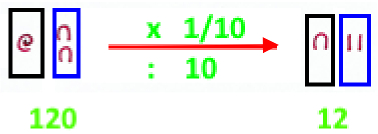
Puisque le « rectangle total » est formé de 10 rectangles égaux, la mesure P de la superficie de chaque rectangle partiel est égale au dixième de la superficie totale. C'est l'objet de l'opération formulée par le scribe :

$$P = S \times \frac{1}{n} = 120 \times \frac{1}{10} = 12\,.$$

Chaque rectangle partiel a donc une aire égale à 12 *coudées carrées*.

A priori, partageant la superficie initiale en 10, on obtient la mesure de la superficie de chaque rectangle partiel, en effectuant une division par 10. Or, ici, le scribe préfère opérer à partir du 1/10. Ceci peut nous interroger. Comment et pourquoi prendre 1/10 de 120 ?

Il se peut que s'agissant de diviser 120 par 10, l'auteur veuille insister sur le fait que le dividende est un multiple de 10 et qu'ainsi le résultat est immédiat. En effet, le système numérique hiéroglyphique étant de base 10, il suffit de remplacer chaque signe numérique par celui qu'il suit et d'utiliser, si nécessaire, pour le chiffre des unités, une table comme celle que nous trouvons dans le *Papyrus Rhind*. Ici, nous avons la transformation hiéroglyphique suivante



Mais nous pouvons aussi nous situer dans une perspective plus générale, à savoir, pour un entier naturel n quelconque comment prendre $1/n$ d'un autre entier, par exemple, 120 ? En dehors des cas particuliers où n est égal à 2, 3, 5 ou 10, les scribes égyptiens ne nous ont pas fourni d'explications et nous en sommes réduits à proposer la seule opération qu'ils sachent effectuer, à savoir, la division de 120 par l'entier n. Autrement dit, en écrivant « prendre 1/10 de 120 », le scribe veut sans doute insister sur le diviseur particulier, à savoir, 10, d'où l'utilisation possible des écritures numériques hiéroglyphiques ou de tables de dixièmes.

Par ailleurs, nous pouvons mettre en relation cette manière d'effectuer une division avec celle qui est pratiquée peu après et que nous retrouvons dans les autres problèmes que nous examinons. En termes d'aujourd'hui, il s'agit de diviser un nombre entier par ce que nous appelons le *quotient-de-proportion* dont l'expression égyptienne est fractionnaire. Comme, ici, pour la division par 10, les scribes opèrent à partir du calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*. Autrement dit, si nous situons cette procédure dans une perspective générale, ceci revient à remplacer la division de a par b par une double opération : d'abord, le calcul de l'inverse $\bar{b}$ de b, puis la multiplication de a par cet inverse, c'est-à-dire, l'inverse du diviseur :

$$a : b = a \times \bar{b}\,.$$

En 1930, Kurt Vogel y voyait une ressemblance avec la pratique des savants babyloniens[93]. Mais il oubliait de retenir une différence essentielle avec les techniques égyptiennes. Alors que les scribes égyptiens peuvent théoriquement effectuer la division entre deux expressions fractionnaires quelconques, il n'en est plus de même à Babylone où le fait que, par exemple, 7 n'a pas d'inverse, c'est-à-dire, en termes d'aujourd'hui, que 1/7 n'a pas une écriture sexagésimale finie, était bien connu. Voir, aujourd'hui, par exemple, un cas analogue avec l'écriture décimale illimitée de 1/3 : 0,333 333 333 333 … .

[93] Vogel, 1930, Der Moskauer mathematische Papyrus, p. 455.

Il n'en demeure pas moins que, sauf cas particulier, cette manière d'utiliser l'inverse du diviseur est le plus souvent tout aussi difficile à conduire que la division directe. Ici, sur le plan opératoire, on ne voit pas comment multiplier 120 par 1/10 autrement qu'en effectuant la division par 10. Plus généralement, pour calculer l'inverse d'un nombre il faut diviser 1 par ce nombre. Donc, la procédure suivie par le scribe revient à écrire

$$a : b = a \times (1 : b)\,,$$

manière de procéder qui peut trouver son utilité lorsque le résultat de la division de 1 par b est plus facile à déterminer que celui de la division directe de a par b. Nous y reviendrons.

Une opération *a priori* insolite : le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*

Tu diviseras 1 par $1/2\ \ 1/4$. Il en résultera : $1\ \ 1/3$.

Comme nous venons de le souligner, le scribe nous propose d'effectuer une opération *a priori* insolite. En effet, il demande de « calculer (à partir de) $1/2\ \ 1/4$ jusqu'à trouver 1 (plus exactement, un) », c'est-à-dire, de diviser 1 par le *quotient-de-proportion* de chaque rectangle partiel, à savoir, $1/2\ \ 1/4$, ce qui revient à inverser ce « quotient ». Aujourd'hui, nous pouvons écrire :

$$1 : \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3} = 1+\frac{1}{3}.$$

Par suite, puisque le *quotient-de-proportion* est ici le quotient de la mesure de la largeur par celle de la longueur, son inverse n'est autre que le quotient de la mesure de la longueur par celle de la largeur, ce qui, *a priori*, ne change rien au fondement d'une procédure de résolution du problème et rend insolite, à cet instant, cette manière d'opérer :

$$\bar{Q} = 1 : Q = \frac{1}{Q} = 1 : (l : L) = 1 : \frac{l}{L} = \frac{L}{l} = L : l\,.$$

Par ailleurs, nous verrons que la considération du *quotient-de-proportion* Q est arithmétiquement aussi simple que celle de son inverse $\bar{Q}$. Enfin, si nous nous situons dans une perspective opératoire, comme nous venons de le dire, cette inversion peut être replacée dans le cadre de la division indirecte de 12 par le *quotient-de-proportion* $1/2\ \ 1/4$ comme produit de 12 par l'inverse du *quotient-de-proportion*, alors que la division directe est immédiate et ne nécessite qu'une seule opération.

Il n'en demeure pas moins que le résultat de la division de 1 par 1/2 1/4 donné par le scribe étant égal à 1 1/3, donc, comportant le quantième ternaire 1/3, pour effectuer cette opération, nous sommes conduits à proposer l'utilisation de 2/3 comme multiplicateur auxiliaire de telle sorte que cette opération commentée pourrait s'effectuer comme suit :

\	1	1/2 1/4	(initialisation)
	2/3	1/3 1/6	(calcul ou *table de deux-tiers*)
	2/3	1/2	(réduction)
\	1/3	1/4	(*dédoublement*)
Total		1	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=1$

$$\bar{Q}=\frac{1}{Q}=1:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{3}.$$

Nous voyons qu'ici, si nous considérons directement la « règle » du produit de deux quantièmes, à savoir,

$$\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{1}{a\times b},$$

l'introduction du multiplicateur 2/3 peut être battue en brèche, En effet, nous avons alors directement, en utilisant la simplification de 1/6 1/12 en 1/4 :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{4\times 3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

Notons aussi que la considération du multiplicateur 1/3 peut résulter de l'utilisation du *réducteur commun*, ici, 4, sorte de palliatif à notre dénominateur commun de l'expression 1/2 1/ 4 :

	1	4
\	1/2	2
\	1/4	1
	total	3

$$4\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=3 \text{ d'où } \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

et

\	1	1/2 1/4	(initialisation)
manque		1/4	$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$
\	1/3	1/4	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

Il n'en demeure pas moins que les données particulières donnent lieu à des expressions immédiates et simples des quotients des côtés, à savoir, 1/2 1/4 et 1 1/3, la première étant « binaire » et la seconde « ternaire ». Aujourd'hui, égaux respectivement à 3/4 et 4/3, leur simplicité saute aux yeux. Il est évident que dans un contexte plus général, ces quotients peuvent avoir des expressions plus ou moins simples, de telle sorte que l'auteur d'un problème semblable peut choisir ou faire rechercher celle qui est la plus appropriée.

Le calcul du carré de la mesure, en *coudées*, de la longueur

Tu multiplieras ce 12 par 1 1/3. Il en résultera : 16.

Ensuite, le scribe demande de multiplier la mesure, 12, de la superficie de chacun des rectangles partiels par le nombre qu'il vient de trouver, à savoir, $1\ \ 1/3$. Nous pouvons observer qu'il obtient ainsi le carré de la mesure, en *coudées*, de la longueur. En effet, nous pouvons écrire :

$$16 = 12 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = P \times \bar{Q} = (L \times l) \times (L : l) = L^2 \,.$$

Par conséquent, le carré de la mesure de la longueur de chacun des rectangles partiels est égal à 16. C'est aussi la mesure, en *coudées carrées*, de la superficie du carré dont la mesure du côté, en *coudées*, est égale à celle de la longueur de chaque rectangle partiel.

Cette multiplication peut s'effectuer comme suit :

\	1	12	(initialisation)
	2/3	8	(*table de deux-tiers*)
\	1/3	4	(*dédoublement*)
Total		16	$(12 + 4 = 16)$

Le calcul de la mesure, en *coudées*, de la longueur de chaque rectangle partiel

Tu extrairas sa racine carrée : 4.

Ayant obtenu le carré de la mesure, en *coudées*, de la longueur de chacun des rectangles partiels, il est naturel qu'en en prenant la racine carrée, le scribe détermine ainsi la mesure, en *coudées*, de la longueur de chacun des rectangles partiels :

$$4 = \sqrt{16} = \sqrt{L^2} = L \,.$$

Nous ne savons pas comment le scribe peut obtenir ce type de résultat. Comme ses collègues babyloniens, il se peut qu'il dispose de tables de carrés et par suite de racines carrées.

Le calcul de la mesure, en *coudées*, de la largeur de chaque rectangle partiel

Tu multiplieras 4 par $1/2\ \ 1/4$. Il en résultera : 3.

Puisque pour chaque rectangle partiel, la mesure L, en *coudées* et le *quotient-de-proportion* Q des dimensions, c'est-à-dire, ici, le quotient de la mesure de la largeur à celle de la longueur, sont connus, le scribe peut en déduire la mesure, en *coudées*, de la largeur de chaque rectangle partiel :

$$3 = 4 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = L \times Q = L \times (l : L) = l\,.$$

La réponse

Il en résultera : 10 *hayt* de 4 *coudées* par 3.

Le scribe peut conclure. Les 10 rectangles partiels ont, pour longueur et largeur communes, respectivement, 4 et 3 *coudées*. En fait nous pouvons nous interroger sur la signification que nous pouvons accorder aux expressions *hayt.èf* (HAjj.t.f) et *nèt* (n.t). Il est à noter que, seuls, A. Imhausen et J. Ritter prennent en compte le signe de la vipère. N'oublions pas que *hayt* (HAjj.t) peut signifier une bande et que nous avons ainsi une bande constituée de 10 rectangles de 4 par 3.

D'autres procédures

Nous pouvons considérer d'autres procédures pour résoudre l'exercice UC 32162-1. Pour les définir, de manière générale, nous nous situons dans une perspective algébrique consistant à déterminer, dans la structure numérique égyptienne, la solution du système

$$xy = P \quad \text{et} \quad y = Q \times x = x \times Q\,.$$

Aujourd'hui, nous obtenons immédiatement les diverses expressions suivantes :

$$x = \sqrt{\frac{P}{Q}} = \sqrt{P \times \frac{1}{Q}} = \sqrt{\frac{1}{Q} \times P} = \sqrt{P : Q} \quad , \quad y = Q \times x = x \times Q = \sqrt{Q \times P} = \sqrt{P \times Q}\,.$$

Dans le UC 32162-1, comme en M6, nous avons

$$P = 12 \quad , \quad Q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad , \quad \bar{Q} = 1 : Q = 1 + \frac{1}{3}.$$

Une première procédure différente de celle employée par les scribes qui ont rédigé le *Fragment d'El Lahoun* ou le *Papyrus de Moscou*, consiste à remplacer la multiplication par l'inverse du *quotient-de-proportion* Q par la division directe de P par ce *quotient-de-proportion*. Dans ce cas, nous avons un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$x = \sqrt{P : Q} \quad \text{et} \quad y = x \times Q\,.$$

Alors, ici, la seule opération nouvelle est la division de 12 par 1/2 1/4 qui pourrait se présenter comme suit :

	1	1/2 1/4	(initialisation)
	2	1 1/2	(*doublement*)
	4	3	(*doublement*)
	8	6	(*doublement*)
\	16	12	(*doublement*)

Certes, cette manière de procéder par *doublements* successifs est classique mais nous comprenons facilement que plus le dividende est grand plus le nombre de ces *doublements* est important. Autrement dit, de manière générale, la technique suivie par le scribe peut être plus rapide.

Une autre résolution consiste à suivre la voie empruntée par le scribe dans le problème M7 du *Papyrus de Moscou*. Nous avons alors un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$y = \sqrt{P \times Q} \quad et \quad x = y \times (1 : Q).$$

Cette fois nous avons deux opérations nouvelles. Tout d'abord, la multiplication de P par Q, c'est-à-dire de 12 par 1/2 1/4 qui peut s'effectuer comme suit :

	1	12	(initialisation)
\	1/2	6	(*dédoublement*)
\	1/4	3	(*dédoublement*)
Total		9	

Il ne reste plus qu'à multiplier 3, racine carrée de 9 que nous venons de trouver, par l'inverse du *quotient-de-proportion* qui a été calculé par le scribe, soit, $1\ \ 1/3$, opération qui pourrait se présenter comme suit :

	1	3	(initialisation)
	1/3	1	(inversion)
Total		4	

Ici, cette troisième procédure est très simple.

Enfin, nous pouvons considérer une quatrième manière d'opérer. Elle consiste à remplacer la multiplication précédente par la division directe. Nous avons alors un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$y = \sqrt{P \times Q} \quad et \quad x = y : Q.$$

Autrement dit, il nous reste à considérer la division de 3 par 1/2 1/4, opération qui pourrait se présenter comme suit

	1	1/2 1/4	(initialisation)
	2	1 1/2	(*doublement*)
\	4	3	(*doublement*)

et qui est tout aussi immédiate. En résumé, le cas particulier du *quotient-de-proportion* choisi par le scribe donne lieu à des calculs très simples pour les trois procédures que nous venons de considérer.

En guise de conclusion

Le début du texte du *Fragment UC 32 162 d'El-Lahoun* est très lacunaire. Nous avons suivi l'interprétation qu'en a donné S. Couchoud car elle permet de donner du sens à l'ensemble du texte qui nous est parvenu. De manière fort pédagogique, le scribe met en évidence deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il commence par considérer une bande rectangulaire dont les dimensions sont données de telle sorte que l'on puisse en calculer la mesure de la superficie. Ensuite, on découpe cette bande en 10 morceaux rectangulaires tous égaux de telle sorte que l'on peut en déduire la mesure commune de leur superficie. Enfin, on doit traiter le problème inverse, à savoir, déterminer les dimensions de ces morceaux si l'on connaît leur *quotient-de-proportion*, c'est-à-dire, le *nombre-de-fois* que la mesure de la largeur de chaque rectangle partiel est celle de la longueur. Dans cette dernière partie, nous sommes donc fort éloignés d'un problème pratique montrant ainsi le fruit d'une véritable activité mathématique. Nos conclusions concerneront essentiellement ce dernier exercice.

Nous retrouvons les mêmes données et la même procédure de résolution dans le problème M6 du *Papyrus de Moscou* de telle sorte que les conclusions sont semblables. En termes *arithmétiques*, nous pouvons considérer qu'il s'agit de trouver les dimensions d'un rectangle, longueur et largeur, dont on connaît leur *produit* en tant que mesure de sa superficie et leur *quotient* que nous appelons *quotient-de-proportion* car caractérisant la forme du rectangle. En fait, d'un point de vue *numérique,* dans le cas de ces problèmes, le *quotient-de-proportion* est sans doute envisagé comme étant le *nombre-de-fois* que la mesure l de la largeur est celle, L, de la longueur :

$$l = L \times Q \ ,$$

le calcul de son inverse permettant d'obtenir le *nombre-de-fois* que la mesure de la longueur est celle de la largeur :

$$L = l \times \bar{Q} \ .$$

Ce sont les deux relations fondamentales entre ces deux dimensions qui conduisent les scribes à ne pas considérer, par exemple, la donnée du produit, sous la forme de la mesure commune de la superficie des rectangles partiels, quand il s'agit de déterminer la mesure d'une dimension lorsque celle de l'autre est connue.

Aujourd'hui, nous pouvons dire que ce *nombre-de-fois* est le ressort principal de la procédure employée. Situé dans un cadre géométrique, il permet de relier les données arithmétiques du problème, produit et quotient, sous la forme de la mesure de la superficie et de l'inverse du *quotient-de-proportion*, comme on peut le voir dans ce que certains historiens des mathématiques appellent l'algèbre géométrique babylonienne ou grecque. Plaçons-nous dans une situation élémentaire, à savoir, celui d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur qui peut être celui de la figure du problème M6. Il est clair que sa superficie est le double de celle du carré dont la mesure du côté est celle de la largeur du rectangle. Plus généralement, et c'est là que la géométrie permet d'étendre les nombres entiers considérés aux nombres rationnels, si la mesure de la longueur est un *nombre-de-fois* Q, entier ou rationnel, celle de la largeur, la mesure de la superficie de ce rectangle est Q fois la mesure de la superficie du carré dont la mesure du côté est celle de la largeur. Autrement dit, de manière encore plus générale, si on multiplie la mesure d'un côté d'un rectangle par un nombre entier ou rationnel, la mesure de la superficie du rectangle obtenu est celle du rectangle initial multipliée par ce nombre. En fait, les scribes utilisent la « relation inverse », à savoir, que multiplier la mesure de la superficie d'un rectangle par un nombre, entier ou rationnel, revient à considérer la mesure de la superficie du rectangle obtenu en multipliant une de ses dimensions par ce nombre. Plus précisément, dans les problèmes de dimensions que nous examinons les scribes prennent comme nombre multiplicateur, le *nombre-de-fois* que la mesure de la longueur est celle de la largeur. Dans les exercices UC 32 162-1, M6 et M17, il faut donc calculer l'inverse du *quotient-de-proportion* ce qui peut être traduit aujourd'hui par les égalités suivantes :

$$P \times \bar{Q} = (L \times l) \times (L : l) = L \times [l \times (L : l)] = L \times L = L^2 .$$

Il ne reste plus qu'à extraire la racine carrée du résultat ainsi calculé pour obtenir la mesure de la longueur du rectangle. Dans les problèmes de dimensions que nous considérons ces racines carrées sont des nombres entiers simples, ici 4, qui peuvent être obtenues au moyen de tables. Il semble qu'au début du deuxième millénaire avant notre ère, les scribes égyptiens n'utilisaient pas des approximations de racines carrées ce qui impose des conditions pour les données du problème. Il en ressort que celui-ci est fabriqué à partir des données qui, en l'occurrence, ici, sont liées au triplet pythagoricien (3, 4, 5) que nous retrouvons dans d'autres textes égyptiens qui nous sont parvenus sans que le caractère pythagoricien intervienne à un moment quelconque.

Il n'en demeure pas moins que l'expression particulière du *quotient-de-proportion*, à savoir, 1/2 1/4, implique que les autres procédures que nous avons examinées sont aussi simples à mettre en œuvre. En quelque sorte, nous pouvons considérer que les exercices UC 32 162-1 et M6 sont une préparation pour résoudre des problèmes semblables au M17 où le *nombre-de-fois* est plus proche d'un nombre rationnel quelconque.

Il n'en demeure pas moins qu'un scribe pourrait fabriquer un problème « général » que nous pouvons, aujourd'hui, formuler comme suit

Paver un rectangle de dimensions L' et l' en n rectangles partiels égaux dont le *quotient-de-proportion* soit le *nombre-de-fois* que la mesure de la largeur de chaque rectangle partiel est celle de la longueur.

Nous pouvons proposer l'algorithme commenté suivant (pour ne pas alourdir la présentation, nous avons omis les unités de mesures, en *coudées*, pour les longueurs et en *coudées carrées* pour les superficies) :

Données	D_1	L'	Mesure de la longueur du rectangle
	D_2	l'	Mesure de la largeur du rectangle
	D_3	n	Nombre de rectangles partiels
	D_4	$Q = l : L < 1$ $l = L \times Q$	*Quotient-de-proportion* ou *nombre-de-fois* que la mesure de la largeur de chaque rectangle partiel est celle de la longueur
(1)	$D_1 \times D_2$	$L' \times l' = S$	Mesure de la superficie du rectangle
(2)	$(1) :\ D_3$	$S : n = L \times l = P$	Mesure de la superficie de chaque rectangle partiel
(3)	$\overline{D_4}$	$1 : Q = \bar{Q} = L : l$	Calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*
(4)	$(2) \times (3)$	$P \times \bar{Q} = L^2$	Carré de la mesure de la longueur
(5)	$\sqrt{(4)}$	$\sqrt{Q} = L$	Mesure de la longueur de chaque rectangle partiel
(6)	$(5) \times D_4$	$L \times Q = l$	Mesure de la largeur de chaque rectangle partiel

Bien sûr, pour paver le rectangle, sans découpage, les données doivent obéir à certaines conditions. Par exemple, on peut fabriquer un tel problème à partir de sa solution, c'est-à-dire, celle des mesures l et L des dimensions de chaque rectangle partiel en prenant pour données

$$L' = pL \quad , \quad l' = ql \quad , \quad Q = l : L \quad , \quad n = pq \, ,$$

où p et q sont des nombres entiers. Evidemment, ces nombres étant cachés, on peut les retrouver facilement à partir de la solution et vérifier ainsi la possibilité d'un pavage sans découpage.

BIBLIOGRAPHIE

CANTOR, Moritz, Die mathematischen Papyrusfragmente von Kahun, *Orientalische Litteratur-Zeitung*, 1 (1898) 306-308.

CLAGETT Marshall, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book*, Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics, Philadelphie, American Philosophical Society, 1999 ; pp. 245-246, 414-415 (fig. IV.12).

COUCHOUD Sylvia, 1983, *Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique*, Thèse de Doctorat de Troisième cycle, Lyon, Université Lyon II, 1983 ; pp. 250-253.

COUCHOUD Sylvia, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique, Paris, Éditions Le Léopard d'or, 1993 ; pp. 135-139.

GILLAIN Olivier, 1927, *La science égyptienne, l'arithmétique au Moyen Empire*, Bruxelles, Édition de la Fondation Égyptologique Reine Élisabeth, 1927 ; pp. 233-244.

GILLINGS Richard, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, Cambridge, The Massachusetts Institute of Technology, 1972 ; réimp., New York, Dover, 1982 ; pp. 162-165.

GRIFFITH Francis Llewellyn, 1898, *The Petrie Papyri, Hieratic Papyri from Kahun and Gurob (principally of the Middle Kingdom)*, 2t., Londres, Bernard Quaritch,1898 ; pp. I, 17-18, 101, II, pl. VIII.

IMHAUSEN Annette, 2003_1, *Ägyptische Algorithmen*. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathematischen Aufgabentexten, Wiesbaden, Harrassowitz Verlag, 2003 ; pp. 79-80, 83-84, 152-154.

IMHAUSEN Annette, RITTER James, 2004, Mathematical Fragments : UC 32114B, UC 32118B, UC 32134A+B, UC 32159-UC 32162, *in* Collier, Quirk, 2004, *The UCL Lahun Papyri*, pp.71-96 ; pp. 78-80.

MICHEL Marianne, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, Numération, métrologie, arithmétique, géométrie et autres problèmes, Bruxelles, Éditions Safran, 2014 ; pp. 227-230.

NEUGEBAUER Otto, 1931_2, Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik Astronomie und Physik* 1 (1931) 413-451.

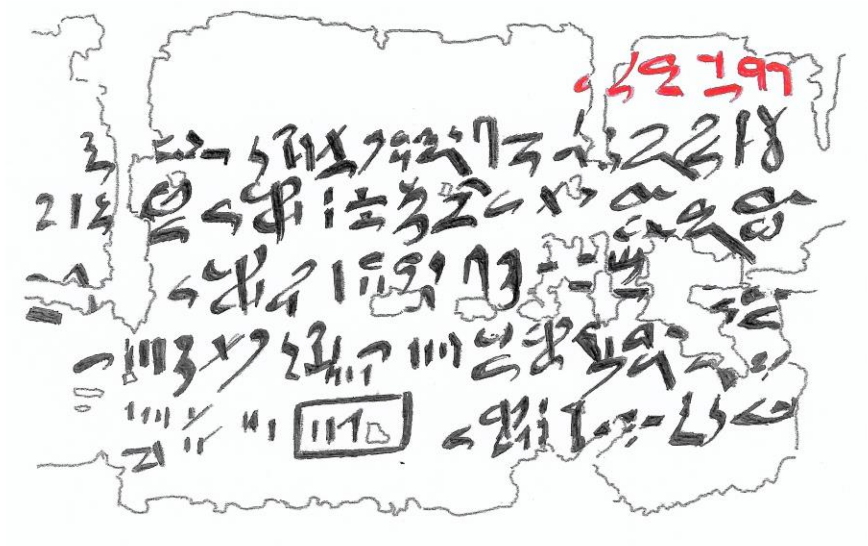
PARKER Richard, 1972, *Demotic Mathematical Papyri*, Providence, Brown University Press, 1972.

REINEKE Walter-Friedrich, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter*, Thèse, 2 vol., Berlin, Humbolt-Universität, 1964 ; pp. 179-180.

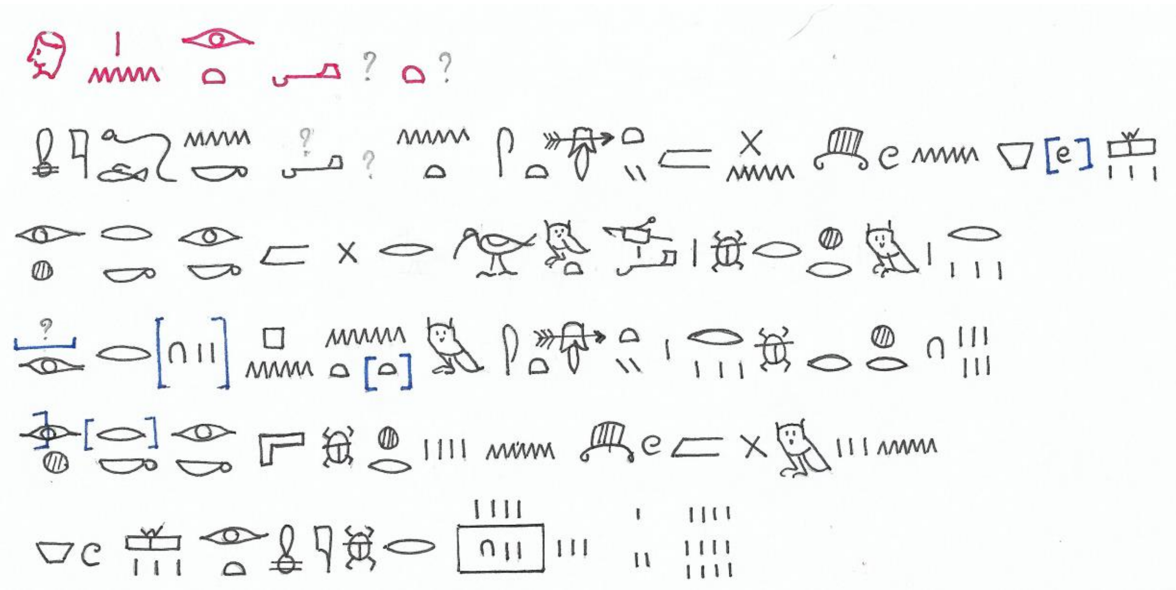
SCHACK-SCHACKENBURG Hans, 1900, Der Berliner Papyrus 6619, *Zeitschrift für Ägyptische Sprache und Altertumskunde* 38 (1900) 135-140 ; pp. 138-139.

LE PROBLÈME M6 DU *PAPYRUS DE MOSCOU*

TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSCRIPTION SAVANTE

L_1 **tp n jr.t (a.t ?)**

L_2 mj Dd(.w) n.k (a.t ?) n.t st.tjj [12] 2' 4' n Aw n (w)zx<w>

L_3 jr.xr.k jr.k 2' 4' r gm.t wa xpr.xr m 1 3'

L_4 j<r 12> pn nt<jj> m st.tjj 1 3' [zp] xpr.xr 16

L_5 <j>r.x<r>.k jr.k qnb.t xpr.xr 4 n Aw 2' 4' m 3 n

L_6 (w)zxw jr.t mj xpr   4   \ 1   4

3 $\boxed{12}$ \ 2   8

TRANSCRIPTION VOCALISÉE

L_1 **tèp èn irèt (ât ?)**

L_2 mi djèd(.ou) én.èk (ât ?) nèt sététy [12] 2' 4' èn aou èn (ou)zékh<ou>

L_3 ir.khér.èk ir.èk 2′ 4′ èr gémèt ouâ khépér.khèr èm 1 3'

L_4 i<r 12> pèn nét<y >èm sététy 1 3' [zèp] khépér.khèr 16

L_5 <i>r.khé<r>.èk ir.èk qénébèt khépér.khèr 4 èn aou 2' 4' èm 3 èn

L_6 (ou)zékhou irèt mi khépèr   4   \ 1   4

3 $\boxed{12}$ \ 2   8

TRANSCRIPTION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 **tèp èn irèt (ât ?)**[1]

L_2 mi djèd(.ou) én.èk (ât ?) [1] nèt sététy[2] [12][3] 2’ 4’ èn aou èn (ou)zékh<ou$_1$> [4]

L_3 ir.khér.èk ir.èk 2′ 4′ èr gémèt ouâ khépér.khèr èm 1 3’

L_4 i<r 12> pèn[5] nét<y>[6] èm sététy 1 3’ [zèp][7] khépér.khèr 16

L_5 <i>r.khé<r>.èk ir.èk[8] qénébèt[9] khépér.khèr 4 èn aou 2’ 4’[10] èm 3 èn

L_6 (ou)zékhou$_1$ irèt mi khépèr

	4	\	1	4
3	$\boxed{12}$	\	2	8

1 — La transcription et par suite la traduction du terme écrit par le scribe est délicate car, en M6, il figure deux fois, mais, de manière incomplète, en lacune. Battiscombe Gunn et Eric Peet[94] y consacrent six lignes dans les notes de leur transcription. Ils lisent le déterminatif de la maison (O1 dans la classification de Gardiner) précédé sans doute des « lettres » *â* (a) et *t* (t) permettant la lecture *ât* (a.t), mot qui peut signifier une pièce, une maison ou encore un enclos. Wasili Struve[95] retient les « lettres » *p* (p) et *t* (t) et le déterminatif de la pièce d’eau (N37 dans la même classification). Sylvia Couchoud[96] le suit dans cette transcription mais considère le signe du papyrus enroulé (Y1) comme déterminatif. Tous les deux donnent la même acception « rectangle ». Comme Annette Imhausen[97] et Marianne Michel[98], nous avons retenu la première transcription et adopté l’acception **enclos (rectangulaire)**. Lors de notre adaptation, nous pourrions parler d’un rectangle. Nous avons préféré enclos rectangulaire. Les dimensions du rectangle étant 3 et 4, cela conduit à une très petite pièce d’habitation si l’on choisit la *coudée* comme unité de mesure. En revanche, comme le soulignent Gunn et Peet, cela convient pour un enclos lorsque nous considérons le *khèt* qui vaut 100 coudées soit 52 mètres environ. Notons que, pour la deuxième occurrence, la lacune est entourée de 5 traces. À droite deux, en bas une et à gauche deux. Les deux signes du bas à droite semblent être les restes d’un signe petit et arrondi. La trace du haut correspond à un signe petit qui doit se développer sur la gauche. Et à sa gauche un trait vertical avec en dessous un signe qui ressemble à la « lettre » k mais de petite dimension. Ce signe est passé sous silence par les différents traducteurs.

2 — Depuis l’édition de Struve, tous les commentateurs retiennent sa transcription hiéroglyphique mais n’en donnent pas la même transcription savante ainsi que la même interprétation. En fait le scribe a écrit les « lettres » s et t, suivies du signe de la peau de bovin percée (F29 de la classification de Gardiner) dont une des valeurs phonétiques est st et qui

[94] Gunn, Peet, 1929, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus. Pour des références plus complètes, voir la bibliographie en fin d’étude. Sauf pour les citations, nous nous bornons à une brève indication lors de la première occurrence.
[95] Struve, 1930 (1977), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*.
[96] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*.
[97] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*.
[98] Michel, 2014, *Les mathématiques de l’Égypte ancienne*.

précède les « lettres » t et jj d'où nos transcriptions *sététy* (st.tjj) qui diffèrent de celles données par Walter-Friedrich Reineke[99] (st.t) ou par S. Couchoud (stwtj). Mais, avant Struve, dans l'étude qu'ils ont consacré à quatre problèmes géométriques du *Papyrus de Moscou*, Gunn et Peet avaient mis l'accent sur les mesures en lisant un rectangle (Aa12 de la classification de Gardiner) au lieu de la « lettre » t et le chiffre 2 pour les deux traits obliques de la « lettre » jj. Cette interprétation a néanmoins été retenue par A. Imhausen qui transcrit sTA.t <1>[sic!]2 et sTA.t 2 et traduit 12 sTA.t alors que, comme la plupart des commentateurs, nous préférons un terme dont la signification est proche de **superficie**.

3 — Il se peut que le scribe ait commis une erreur de copie. Il a omis de donner la valeur de la mesure de la superficie, à savoir, 12, d'où notre restitution. Il s'en est sans doute aperçu puisqu'à la ligne **L_4** il précise à quoi correspond le nombre 12 qu'il considère à cet instant. La plupart des commentateurs omettent le nombre 12 dans leur transcription hiéroglyphique ainsi que dans leur transcription savante. Mais, le plus souvent, sans précaution, ils le considèrent dans leur traduction.

4 — L'auteur du *Papyrus de Moscou* donne à lire plusieurs écritures de ce terme. En M6, le scribe trace tout d'abord le signe de la coupe (W10 dans la classification de Gardiner) auquel les égyptologues donnent les valeurs phonétiques zxw ou sxw suivi de la « lettre » w et du classique rouleau de papyrus avec les trois barres du pluriel, indiquant, par ce complément, une certaine abstraction. En M7, il fait précéder ces marques de la « lettre » w. Enfin, en M17, l'écriture est plus explicite avec les « lettres » z, x, w, le signe de la coupe et le rouleau de papyrus. Suivant nos conventions, nous avons opté pour l'écriture complète *ouzékou* (wzxw) qui désigne la **largeur** d'un rectangle mais aussi, en M7, la base d'un triangle ou plutôt la mesure du plus petit côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, d'où notre indexation.

5 — Le début de cette instruction est lacunaire. Ceci laisse la place à diverses restitutions. Pourtant, le propos est clair. Le scribe invite à multiplier la mesure 12 qu'il aurait dû donner, à savoir, celle de la superficie du rectangle, par le nombre 1 1/3 qu'il vient de trouver. Or, avant le terme *pèn* (pn) nous lisons seulement une marque, en écriture basse, du signe classique de l'œil, le nombre 12 étant absent. Il n'y a pas de place pour d'autres signes. Fort justement, dans leur transcription hiéroglyphique, Struve et A. Imhausen restituent ces seules marques. Nous les avons suivis, ce qui nous conduit à transcrire *i<r 12> pèn* (j<r 12> pn) que nous traduisons par **fa<is> ce <12>** qui donne lieu à l'adaptation opératoire mul<tiplie> ce <12>.

6 — La fin de l'écriture de ce terme est dans une lacune. Les transcriptions qui en sont proposées reviennent à adopter *nétèt* (nt.t) ou *néty* (ntjj). Tous deux sont des pronoms relatifs, le premier, féminin ou pluriel, tandis que le second est masculin. Ici, il se rapporte au nombre 12 pour lequel le scribe vient d'utiliser le démonstratif masculin singulier *pèn* (pn). Par suite, nous avons choisi la dernière transcription qui peut donner lieu à la traduction **qui est**.

7 — Comme la plupart des commentateurs, nous avons rajouté le marqueur *zèp* (zp) d'une multiplication. Il s'agit sans doute d'une omission de copie.

8 — Le début de l'expression *ir.khér.èk ir.èk* (jr.xr.k jr.k), classique dans le *Papyrus de Moscou*, est lacunaire.

---

[99] Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter*.

9 — Pour signifier la racine carrée, les scribes égyptiens utilisent le signe des deux murs à angle droit (O38 dans la classification de Gardiner) qui a pour valeur phonétique qnb que l'on retrouve dans le terme *qénébèt* (qnb.t) qui signifie le tribunal ou encore le mot *qénébéty* (qnb.tjj) qui désigne le magistrat, celui qui se tient dans l'angle, dans le coin. Dans le *Fragment UC 32162 d'El-Lahoun*, le scribe ajoute la « lettre » t. Nous avons suivi W. Reineke et A. Imhausen qui proposent la transcription *qénébèt* (qnb.t) et traduit par fais le **« coin »** revenant au traditionnel extrais sa racine carrée lors de notre adaptation.

10 — Seuls Gunn et Peet voient le signe de la vipère après 1/2 1/4, marque absente du papyrus à cet endroit. Ceci n'empêche pas certains commentateurs de l'introduire dans leur traduction. Nous les avons suivis seulement lors de notre adaptation.

TRADUCTION

L_1 **Exemple d’une manière de faire (un enclos rectangulaire ?)**

L_2 S’il t’est dit : « un (enclos rectangulaire ?) d’une superficie de [12] ; 2’ 4’ de la longueur pour la largeur ».

L_3 Tu feras ta manière de calculer[1], 2’ 4’ jusqu’à trouver un. Il adviendra : 1 3’.

L_4 Fa<is> ce <12> qui est la superficie, 1 1/3 [fois]. Il adviendra : 16.

L_5 Tu <feras> ta manière de calculer le « coin ». Il adviendra 4 pour la longueur. 2’ 4’ : 3, pour **//$_{6a}$** la largeur.

L_{6b} La manière de faire telle qu’elle apparaît

	4	\	1	4
3	$\boxed{12}$	\	2	8

1 — À la simple instruction *ir.khér.èk* (jr.xr.k), le scribe ajoute *ir.èk* (jr.k) en tant que substantif ce qui rend la traduction difficile. Nous ne trouvons pas une telle formulation dans le *Papyrus Rhind*. Seule M. Michel distingue ces deux expressions en la traduisant par « *alors tu fais en sorte de calculer* ». Littéralement, nous préférons « tu feras ta manière de calculer » optant, lors de nos adaptations, pour les expressions verbales classiques des opérations : multiplication, division ou extraction de racine carrée.

ADAPTATION

Exemple d’une manière de faire un enclos rectangulaire.

S’il t’est dit : « un enclos rectangulaire d’une superficie de 12 ; la largeur est 1/2 1/4 de la longueur ».

Tu diviseras 1 par 1/2 1/4. Il en résultera : 1 1/3.

Multiplie ce 12, qui est la superficie, par 1 1/3. Il en résultera : 16.

Tu extrairas sa racine carrée. Il en résultera 4 pour la longueur. Son 1/2 1/4 : 3 pour la largeur.

La manière de faire telle qu’elle apparaît

	4	\	1	4
3	$\boxed{12}$	\	2	8

COMMENTAIRE

Le problème M6 du *Papyrus de Moscou* est semblable à la deuxième partie de l'exercice *UC 32162-1 d'El-Lahoun*[100]. Les « données » sont identiques et les scribes utilisent la même procédure de résolution. Toutefois, les formulations et présentations sont différentes. Ainsi, en M6, nous trouvons une « preuve » illustrée par une figure, à savoir, un rectangle où, avec les nombres 4 et 3 sont indiquées les mesures trouvées des dimensions des côtés et, à l'intérieur, est inscrit 12, mesure donnée de la superficie du rectangle qui est aussi le résultat de la multiplication jointe de 4 par 3. Ceci nous amène à penser qu'il s'agit d'un « exemple d'une manière de faire (*tèp èn irèt*, tp n jr.t) » une sorte de rectangle, le terme correspondant étant dans une lacune. En revanche, en UC 32162-1, ceci résulte d'une première partie où nous pouvons considérer un pavage d'un rectangle par 10 rectangles partiels de mêmes dimensions que celles du rectangle de M6. Dans les deux problèmes, il faut alors déterminer les dimensions d'un rectangle dont on connaît la mesure, 12, de la superficie et le « rapport » des mesures des dimensions des côtés, à savoir, 1/2 1/4. Ce rapprochement permet de donner un sens aux marques qui subsistent plus ou moins pour désigner, en M6, le « rectangle » particulier et sa « superficie » comme nous l'avons indiqué précédemment lors de nos transcriptions ou traduction. Autrement dit, nous pouvons considérer l'adaptation complétée suivante de l'énoncé

Exemple d'une manière de faire un rectangle.

S'il t'est dit : « un rectangle d'une superficie de 12, la largeur est 1/2 1/4 de la longueur ».

Quelles sont ses dimensions ?

Nous pouvons donc considérer que nous avons les données suivantes pour un rectangle dont les dimensions sont exprimées avec la même unité de longueur et la superficie avec le carré de cette unité :

mesure de la superficie du rectangle : $P = L \times l = 12$,
quotient-de-proportion Q des mesures des dimensions du rectangle :

$$l = L \times Q = L \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \quad , \quad Q = l : L = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} .$$

Une opération *a priori* insolite : le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*

Tu diviseras 1 par $1/2 \;\; 1/4$. Il en résultera : $1 \;\; 1/3$.

Le scribe nous propose d'effectuer une opération *a priori* insolite. En effet, il demande de « calculer (à partir de) $1/2 \;\; 1/4$ jusqu'à trouver 1 (plus exactement, un) », c'est-à-dire, de diviser 1 par le *quotient-de-proportion*, à savoir, $1/2 \;\; 1/4$, ce qui revient à inverser ce « quotient ». Aujourd'hui, nous pouvons écrire :

$$1 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} .$$

[100] Voir Annexe Documents : Les *Fragments d'El-Lahoun*.

Par suite, puisque le *quotient-de-proportion* est ici le quotient de la mesure de la largeur par celle de la longueur, son inverse n'est autre que le quotient de la mesure de la longueur à celle de la largeur, ce qui, *a priori*, ne change rien au fondement d'une procédure de résolution du problème et rend insolite, à cet instant, cette manière d'opérer :

$$\bar{Q} = 1 : Q = \frac{1}{Q} = 1 : (l : L) = 1 : \frac{l}{L} = \frac{L}{l} = L : l\,.$$

Par ailleurs, nous verrons que la considération du *quotient-de-proportion* Q est arithmétiquement aussi simple que celle de son inverse $\bar{Q}$. Enfin, si nous nous situons dans une perspective opératoire, comme nous venons de le dire, cette inversion peut être replacée dans le cadre de la division indirecte de 12 par le *quotient-de-proportion* $1/2\ \ 1/4$ comme produit de 12 par l'inverse du *quotient-de-proportion*, alors que la division directe est immédiate et ne nécessite qu'une seule opération.

Il n'en demeure pas moins que le résultat de la division de 1 par 1/2 1/4 donné par le scribe étant égal à 1 1/3, donc, comportant le quantième ternaire 1/3, nous sommes conduits à proposer l'utilisation de 2/3 comme multiplicateur auxiliaire de telle sorte que cette opération commentée pourrait s'effectuer comme suit :

\ 1	1/2 1/4	(initialisation)
2/3	1/3 1/6	(calcul ou *table de deux-tiers*)
2/3	1/2	(réduction)
\ 1/3	1/4	(*dédoublement*)
Total	1	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=1$

$$\bar{Q} = \frac{1}{Q} = 1 : \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 1+\frac{1}{3}.$$

Nous voyons qu'ici, si nous considérons directement la « règle » du produit de deux quantièmes, à savoir,

$$\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{1}{a\times b},$$

l'introduction du multiplicateur 2/3 peut être battue en brèche, En effet, nous avons alors directement, en utilisant la simplification de 1/6 1/12 en 1/4 :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{4\times 3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

Notons aussi que la considération du multiplicateur 1/3 peut résulter de l'utilisation du *réducteur commun*, ici, 4, sorte de palliatif à notre dénominateur commun de l'expression 1/2 1/ 4 :

	1	4
\	1/2	2
\	1/4	1
	total	3

$$4 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 3 \text{ d'où } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

et

\	1	1/2 1/4	(initialisation)
manque		1/4	$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$
\	1/3	1/4	$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

Il n'en demeure pas moins que les données particulières donnent lieu à des expressions immédiates et simples des quotients des côtés, à savoir, 1/2 1/4 et 1 1/3, la première étant « binaire » et la seconde « ternaire ». Aujourd'hui, égaux respectivement à 3/4 et 4/3, leur simplicité saute aux yeux. Il est évident que dans un contexte plus général, ces quotients peuvent avoir des expressions plus ou moins simples, de telle sorte que l'auteur du problème peut choisir ou faire rechercher celle qui est la plus appropriée.

Le calcul du carré de la mesure de la longueur

Multiplie ce 12, qui est la superficie, par 1 1/3. Il en résultera : 16.

Ensuite, le scribe demande de multiplier 12 qui est la mesure donnée de la superficie du rectangle par le nombre qu'il vient de trouver, à savoir, $1\ 1/3$. Nous pouvons observer qu'il obtient ainsi le carré de la mesure de la longueur. En effet, nous pouvons écrire :

$$16 = 12 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = P \times \bar{Q} = (L \times l) \times (L : l) = L^2 .$$

Par conséquent, le carré de la mesure de la longueur du rectangle est égal à 16. C'est aussi la mesure de la superficie du carré dont la mesure du côté, est égale à celle de la longueur du rectangle, c'est-à-dire, du carré « circonscrit » au rectangle.

Cette multiplication peut s'effectuer immédiatement comme suit :

\	1	12	(initialisation)
	2/3	8	(*table de deux-tiers*)
\	1/3	4	(*dédoublement*)
Total		16	$(12 + 4 = 16)$

Le calcul de la mesure de la longueur du rectangle

Tu extrairas sa racine carrée : 4 pour la longueur.

Ayant obtenu le carré de la mesure de la longueur du rectangle, il est naturel qu'en en prenant la racine carrée, le scribe détermine ainsi la mesure de la longueur du rectangle :

$$4 = \sqrt{16} = \sqrt{L^2} = L\,.$$

Nous ne savons pas comment le scribe ou l'élève peut obtenir ce type de résultat. Comme ses collègues babyloniens, il se peut qu'il dispose de tables de carrés et par suite de racines carrées.

Le calcul de la mesure de la largeur du rectangle

Son 1/2 1/4 : 3 pour la largeur.

Puisque la mesure L de la longueur du rectangle et le *quotient-de-proportion* Q des dimensions, c'est-à-dire, ici, le quotient de la mesure de la largeur par celle de la longueur, sont connus, le scribe peut en déduire la mesure l de la largeur du rectangle :

$$L \times Q = L \times (l : L) = l \ = 4 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 3\,.$$

Une preuve ?

La manière de faire telle qu'elle apparaît		4	\	1	4
	3	$\boxed{12}$	\	2	8

Dans le *Papyrus Rhind*, l'expression *irèt mi khépèr* (jr.t mj xpr) figure le plus souvent en début comme pour souligner la procédure que l'on va suivre. Mais il arrive, comme en R28, que le scribe Âhmès l'utilise en fin d'exercice. Ici, c'est presque le cas et nous pouvons dire que nous sommes dans le domaine d'une preuve pour laquelle il aurait pu employer, comme en R21, l'expression *tèp èn sity* (tp n sjtjj) que nous rendons par « exemple de preuve ». Dans le cas du problème M6, comme nous l'avons dit dans l'introduction de notre commentaire, nous sommes en présence d'une preuve comportant la multiplication de 4 par 3 et une figure constituée par un rectangle où, avec les nombres 4 et 3 sont indiquées les mesures trouvées des dimensions des côtés et, à l'intérieur, est inscrit 12, la mesure donnée de la superficie du rectangle qui est aussi le résultat de la multiplication. Nous n'avons pas la preuve que le nombre 3, mesure de la largeur, est le 1/2 1/4 de 4, mesure de la longueur. Autrement dit, le scribe aurait pu ajouter la présentation opératoire suivante :

	1	4
\	1/2	2
\	1/4	1
Total		3

En fait, de manière générale, le scribe n'indique pas comment il effectue les diverses opérations intervenant dans la résolution du problème traité. En revanche, ici, il présente la vérification des résultats sous la forme de leur produit qui conduit à la mesure donnée de la superficie. Puisqu'il a utilisé le *quotient-de-proportion* pour déterminer la deuxième dimension, il s'agit donc d'une véritable preuve.

Comme pour l'exemple R49, nous pouvons nous interroger sur la figure tracée par le scribe. Il semble que nous soyons dans le même cas de représentation, à savoir, celle d'un double carré qui ne correspond pas aux résultats ou données des énoncés. Nous pouvons aussi constater que scribe à qui nous devons le *Papyrus de Moscou* est moins soigneux qu'Âhmès, le rédacteur du *Papyrus Rhind*. En un certain sens, il est illusoire d'en déduire certains excès de précision comme nous pouvons les trouver dans les recherches menées par G. De Young[101], sans parler de l'exactitude de la forme représentée :

D'autres procédures

Nous pouvons considérer d'autres procédures pour résoudre l'exercice M6. Pour les définir, de manière générale, nous nous situons dans une perspective algébrique consistant à déterminer, dans la structure numérique égyptienne, la solution du système

$$xy = P \quad \text{et} \quad y = Q \times x = x \times Q\,.$$

Aujourd'hui, nous obtenons immédiatement les diverses expressions suivantes :

$$x = \sqrt{\frac{P}{Q}} = \sqrt{P \times \frac{1}{Q}} = \sqrt{\frac{1}{Q} \times P} = \sqrt{P : Q} \quad , \quad y = Q \times x = x \times Q = \sqrt{Q \times P} = \sqrt{P \times Q}\,.$$

Dans le M6, comme en UC 32162-1, nous avons

$$P = 12 \quad , \quad Q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad , \quad \bar{Q} = 1 : Q = \frac{1}{Q} = 1 + \frac{1}{3}.$$

Une première procédure différente de celle employée par les scribes consiste à remplacer la multiplication par l'inverse du *quotient-de-proportion* Q par la division directe de P par ce *quotient-de-proportion*. Dans ce cas nous avons un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

[101] De Young, 2009, Diagrams in ancient Egyptian geometry, pp. 343, 350.

$$x = \sqrt{P : Q} \quad \text{et} \quad y = x \times Q\,.$$

Alors, ici, la seule opération nouvelle est la division de 12 par 1/2 1/4 qui pourrait se présenter comme suit :

	1	1/2 1/4	(initialisation)
	2	1 1/2	(*doublement*)
	4	3	(*doublement*)
	8	6	(*doublement*)
\	16	12	(*doublement*)

Certes, cette manière de procéder par *doublements* successifs est classique mais nous comprenons facilement que plus le dividende est grand plus le nombre de ces *doublements* est important. Autrement dit, de manière générale, la technique suivie par le scribe peut être plus rapide.

Une autre résolution consiste à suivre la voie empruntée par le scribe en M7. Nous avons alors un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$y = \sqrt{P \times Q} \quad et \quad x = y \times (1 : Q).$$

Cette fois nous avons deux opérations nouvelles. Tout d'abord, la multiplication de P par Q, c'est-à-dire de 12 par 1/2 1/4 qui peut s'effectuer comme suit :

	1	12	(initialisation)
\	1/2	6	(*dédoublement*)
\	1/4	3	(*dédoublement*)
Total		9	

Il ne reste plus qu'à multiplier 3, racine carrée de 9 que nous venons de trouver par l'inverse du *quotient-de-proportion* qui a été calculé par le scribe, soit, $1\ \ 1/3$, opération qui pourrait se présenter comme suit :

	1	3	(initialisation)
	1/3	1	(inversion)
Total		4	

Ici, cette troisième procédure est très simple.

Enfin, nous pouvons considérer une quatrième manière d'opérer. Elle consiste à remplacer la multiplication précédente par la division directe. Nous avons alors un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$y = \sqrt{P \times Q} \quad et \quad x = y : Q.$$

Autrement dit, il nous reste à considérer la division de 3 par 1/2 1/4, opération qui pourrait se présenter comme suit

	1	1/2 1/4	(initialisation)
	2	1 1/2	(*doublement*)
\	4	3	(*doublement*)

et qui est tout aussi immédiate. En résumé, le cas particulier du *quotient-de-proportion* choisi par le scribe donne lieu à des calculs très simples pour les trois procédures que nous venons de considérer.

En guise de conclusion

Les données et la procédure de résolution du problème M6 sont les mêmes que celles que nous lisons dans la dernière partie du *Fragment UC 32 162 d'El-Lahoun*. Leurs conclusions sont donc semblables. En termes *arithmétiques*, nous pouvons considérer qu'il s'agit de trouver les dimensions d'un rectangle, longueur et largeur, dont on connaît leur *produit* en tant que mesure de sa superficie et leur *quotient* que nous appelons *quotient-de-proportion* car caractérisant la forme du rectangle. En fait, d'un point de vue *numérique,* dans le cas de ces deux problèmes, le *quotient-de-proportion* est sans doute envisagé comme étant le *nombre-de-fois* que la mesure l de la largeur est celle, L, de la longueur :

$$l = L \times Q \ ,$$

le calcul de son inverse permettant d'obtenir le *nombre-de-fois* que la mesure de la longueur est celle de la largeur :

$$L = l \times \bar{Q} \ .$$

Ce sont les deux relations fondamentales entre ces deux dimensions qui conduisent les scribes à ne pas considérer, par exemple, la donnée du produit, sous la forme de la mesure commune de la superficie des rectangles partiels, quand il s'agit de déterminer la mesure d'une dimension lorsque celle de l'autre est connue.

Aujourd'hui, nous pouvons dire que ce *nombre-de-fois* est le ressort principal de la procédure employée. Situé dans un cadre géométrique, il permet de relier les données arithmétiques du problème, produit et quotient, sous la forme de la mesure de la superficie et de l'inverse du *quotient-de-proportion*, comme on peut le voir dans ce que certains historiens des mathématiques appellent l'algèbre géométrique babylonienne ou grecque. Plaçons-nous dans une situation élémentaire, à savoir, celui d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur qui peut être celui de la figure du problème M6. Il est clair que sa superficie est le double de celle du carré dont la mesure du côté est celle de la largeur du rectangle. Plus généralement, et c'est là que la géométrie permet d'étendre les nombres entiers considérés aux nombres rationnels, si la mesure de la longueur est un *nombre-de-fois* Q, entier ou rationnel, celle de la largeur, la mesure de la superficie de ce rectangle est Q fois la mesure de la superficie du carré dont la mesure du côté est celle de la largeur. Autrement dit, de manière encore plus générale, si on multiplie la mesure d'un côté d'un rectangle par un nombre entier ou rationnel, la mesure de la superficie du rectangle obtenu est celle du rectangle initial multipliée par ce nombre. En fait, les scribes utilisent la « relation inverse », à savoir, que multiplier la mesure de la superficie d'un rectangle par un nombre, entier ou rationnel, revient à considérer la mesure de la superficie du rectangle obtenu en multipliant une de ses dimensions par ce nombre. Plus précisément, dans les problèmes de dimensions que nous examinons les scribes prennent comme nombre multiplicateur, le *nombre-de-fois* que la mesure de la longueur est celle de la largeur. Dans les exercices UC 32 162-1, M6 et M17, il faut donc calculer l'inverse du *quotient-de-proportion* ce qui peut être traduit aujourd'hui par les égalités suivantes :

$$P \times \bar{Q} = (L \times l) \times (L : l) = L \times [l \times (L : l)] = L \times L = L^2 \, .$$

Il ne reste plus qu'à extraire la racine carrée du résultat ainsi calculé pour obtenir la mesure de la longueur du rectangle. Dans les problèmes de dimensions que nous considérons ces racines carrées sont des nombres entiers simples, ici 4, qui peuvent être obtenues au moyen de tables. Il semble qu'au début du deuxième millénaire avant notre ère, les scribes égyptiens n'utilisaient pas des approximations de racines carrées ce qui impose des conditions pour les données du problème. Il en ressort que celui-ci est fabriqué à partir des données qui, en l'occurrence, ici, sont liées au triplet pythagoricien (3, 4, 5) que nous retrouvons dans d'autres textes égyptiens qui nous sont parvenus sans que le caractère pythagoricien intervienne à un moment quelconque.

Il n'en demeure pas moins que l'expression particulière du *quotient-de-proportion*, à savoir, 1/2 1/4, implique que les autres procédures que nous avons examinées sont aussi simples à mettre en œuvre. En quelque sorte, nous pouvons considérer que les exercices UC 32 162-1 et M6 sont une préparation pour résoudre des problèmes semblables au M17 où le *nombre-de-fois* est plus proche d'un nombre rationnel quelconque.

Aujourd'hui, nous pouvons, formuler le problème général suivant :

> Calculer les dimensions d'un rectangle dont on connaît la mesure P de sa superficie et le *nombre-de-fois* Q que la mesure de la largeur est celle de la longueur.

Bien entendu, les données ne sont pas quelconques. Si l'on veut que les mesures des dimensions soient des nombres entiers, on doit supposer qu'il existe deux nombres entiers L et l tels que

$$P : Q = L^2 \qquad et \qquad P = L \times l \, .$$

En fait, les nombres L et l sont les mesures respectives de la « longueur » et de la « largeur » du rectangle que l'on doit déterminer.

Nous pouvons proposer l'algorithme commenté suivant [102]:

[102] Voir A. Imhausen 2003, *Ägyptische Algorithmen*, p. 78. Comme souvent, les différences sont dues aux notations des multiplications. Pour nous, multiplier par Q amène à considérer le nombre Q comme étant un multiplicateur.

Calcul des dimensions d'un rectangle			
Données	D_1	$P = L \times l$	Mesure P de la superficie du rectangle
	D_2	$Q = l : L < 1$ $l = L \times Q$	*Quotient-de-proportion* ou *nombre-de-fois* que la mesure de la largeur est celle de la longueur
(1)	$\overline{D_2}$	$1 : Q = \bar{Q}$	Calcul de l'inverse $\bar{Q}$ du *quotient-de-proportion*
(2)	$D_1 \times (1)$	$P \times \bar{Q} = L^2$	Carré de la mesure de la longueur
(3)	$\sqrt{(2)}$	$\sqrt{L^2} = L$	Mesure de la longueur
(4)	$(3) \times D_2$	$L \times Q = l$	Mesure de la largeur

Bibliographie

ARCHIBALD Raymond Clare, 1927, Bibliography of Egyptian Mathematics with special references to the Rhind Mathematical Papyrus and sources of interest in its study *in* Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 178-179, 187-188.

CANTOR Moritz, 1880-1907, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Teubner, vol. 1, 1880, 3ème éd. 1907 ; vol. 2, 1894.

CHACE Arnold et *alii*, 1927-1929, *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058*, 2 vol., Oberlin, Mathematical Association of America, 1927-1929.

CLAGETT Marshall, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book*, Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics, Philadelphie, American Philosophical Society, 1999, 214-215, 388,

COUCHOUD Sylvia, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique, Paris, Éditions Le Léopard d'or, 1993; pp. 134-136.

DE YOUNG Gregg, 2009, Diagrams in ancient Egyptian geometry. Survey and assessment, *Historia Mathematica*, 36 (2009) 312-373.

GILLINGS Richard, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, Cambridge, The Massachusetts Institute of Technology, 1972 ; réimp., New York, Dover, 1982, pp. 137-138, 216.

GUNN Battiscombe, PEET Eric, 1929, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, *The Journal of Egyptian Archaeology* 15 (1929) 167-185.

IMHAUSEN Annette, 2003, *Ägyptische Algorithmen*. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathematischen Aufgabentexten, Wiesbaden, Harrassowitz Verlag, 2003.; pp. 78-79, 83-84.

MICHEL Marianne, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, Numération, métrologie, arithmétique, géométrie et autres problèmes, Bruxelles, Éditions Safran, 2014 : 38-42, 213-216.

NEUGEBAUER Otto, 1931_2, Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik Astronomie und Physik* 1 (1931) 413-451; p. 418-419.

PEET Eric, 1923_1, *The Rhind Mathematical Papyrus British Museum 10057 and 10058*, introduction, transcription, translation and commentary, Londres, The University Press of Liverpool, Hodder and Stougthon, 1923 ; réimp. Nendeln (Liechtenstein), Kraus Reprint, 1970.

PEET Eric, 1931_2, Mathematischer Papyrus des Staadtlichen Museums der Schönen Künste in Moskau von W.W. Struve, *The Journal of Egyptian Archaeology* 17 (1931) 154-160, pp. 154-155, 160

REINEKE Walter-Friedrich, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* Thèse, 2 vol., Berlin, Humbolt-Universität,1964, pp. 144-145.

SPALINGER Antony, 1990, The Rhind Mathematical Papyrus as a Historical source, *Studien zur Altägyptischen Kultur* 17 (1990) 295-337; p. 298.

STRUVE Wasili, 1930 (1977), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, herausgegeben und kommentiert unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von B. A. Turaeff, Berlin, Spinger, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, 1930, rééd. , Würzburg, Jal-reprint, 1973, pp. 125-128.

TSINSERLING D. P., 1925, Geometriya u drevnikh egitpyan (Géométrie dans l'ancienne Égypte), *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'Union des Républiques Soviétiques Socialistes*, Léningrad, 19 (1925) 541-568.

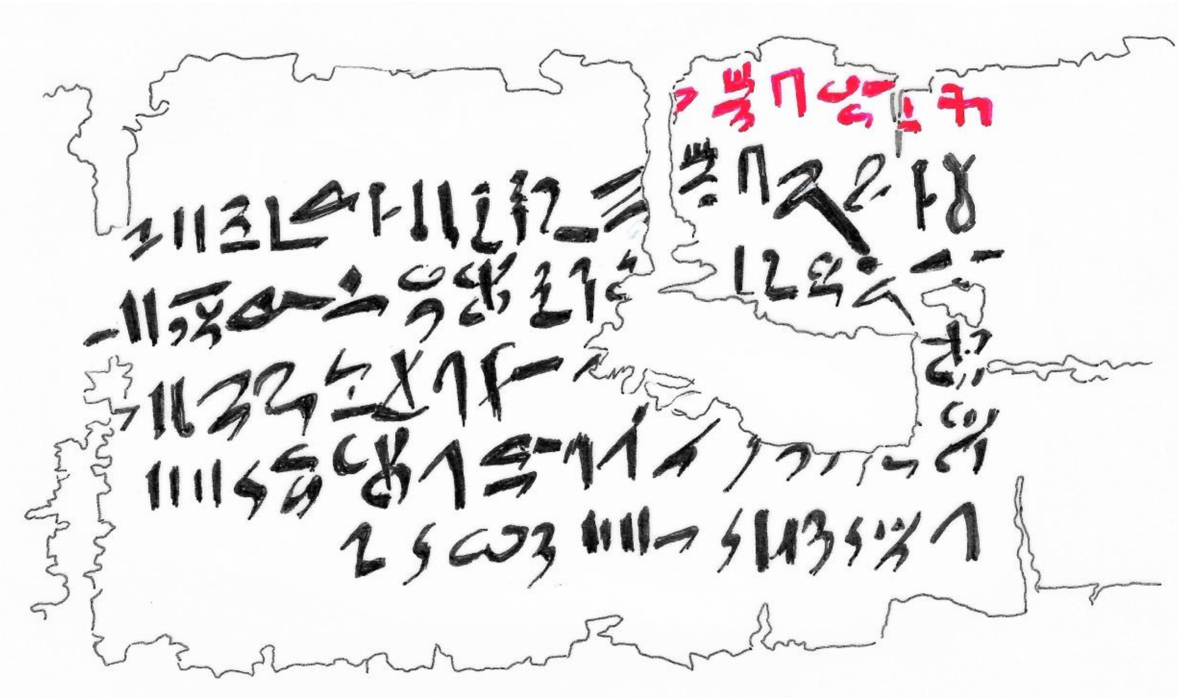
TURAEV Boris, 1917, The volume of the truncated pyramid in Egyptian mathematics, *Ancient Egypt*, Londres, 1917, pp. 100-102.

VOGEL Kurt, 1930_3, Der Moskauer mathematische Papyrus, *Archiv für Geschichte der Mathematik der Naturwissenschaften und der Technik* 13 (1930) 446-463 ; pp.454-455, 461.

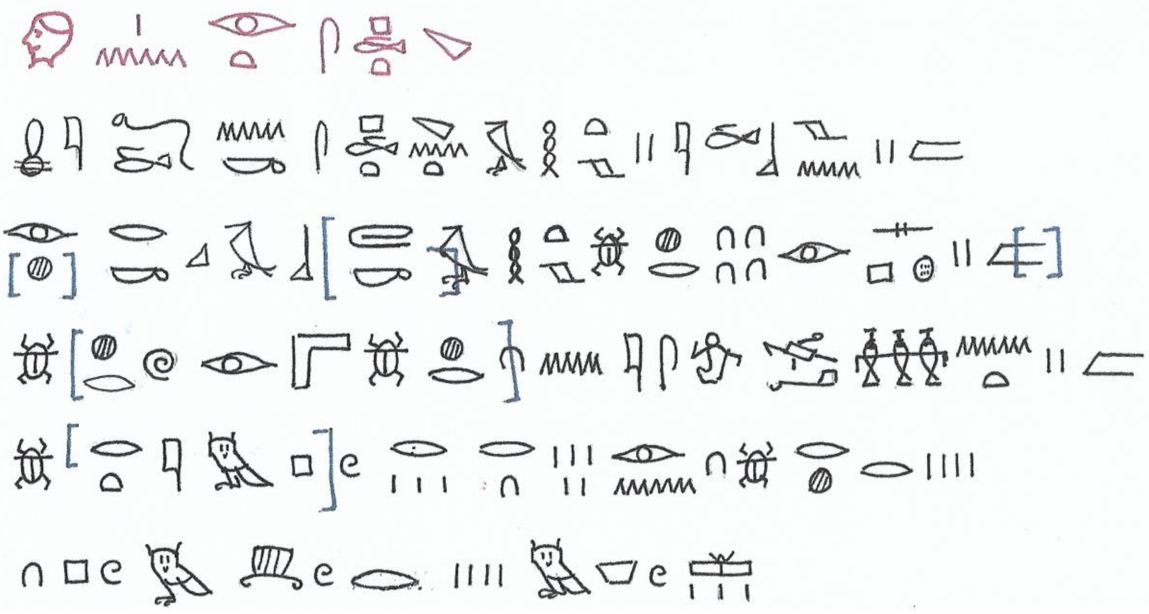
VOGEL Kurt, 1958, *Vorgriechische Mathematik*, 2 t., Hannovre, Hermann Schroedel Verlag ; Paderborn, Verlag Ferdinand Schöningh, 1958; p. 64.

LE PROBLÈME M7 DU *PAPYRUS DE MOSCOU*

TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSCRIPTION SAVANTE

L_1 **tp n jr.t spd.t**

L_2 mj Dd(.w) n.k spd.t n.t AH.t 2_m jdb n 2 2’

L_3 jr. <x>r.k qAb.<k A>H.t xpr.xr 40 jr zp 2 <2’>

L_4 xpr.<xr 100 jr qnb(.t) xpr. xr 1>0. njs wa xnt 2 2’

L_5 xpr.t <jm p>w 3’ 15’ jr n 10 xpr.xr 4

L_6 10 pw m Aw r 4 m wzxw

TRANSCRIPTION VOCALISÉE

L_1 **tèp èn irèt sépédèt**

L_2 mi djéd(.ou)én.èk sépédèt nèt ahèt 2_m idèb èn 2 2’

L_3 ir.<khé>r.èk qab<.èk a>hèt khépér.khèr 40 ir zèp 2 <2’>

L_4 khépér.<khèr 100 ir qénébèt khépér. khèr 1>0 nis ouâ khénèt 2 2’

L_5 khépérèt <im p>ou 3’ 15’ ir èn 10 khépér.khèr 4

L_6 10 pou èm aou èr 4 èm ouzékhou

TRANSCRIPTION VOCALISÉE INDEXÉE

L1 **tèp èn irèt sépédèt**[1]

L2 mi djéd(.ou) én.èk sépédèt nèt ahèt 2_m[2, 3] idèb èn 2 2’

L3 ir.<khé[4]>r.èk qab<.èk a[5]>hèt[6] khépér.khèr 40 ir zèp 2 <2’>[7]

L4 khépér.<khèr 100 ir qénébèt khépér.khèr 1[5]>0 nis ouâ khénèt 2 2’

L5 khépérèt <im p[5]>ou 3’ 15’ ir èn 10 khépér.khèr 4

L6 10 pou èm aou èr 4 èm ouzékhou

1 — Dans les documents hiératiques qui nous sont parvenus de l’Égypte ancienne, nous trouvons quatre problèmes relatifs à des triangles sans qu’*a priori*, l’on puisse leur accorder une forme particulière : R51, M4, M7 et M17. Dans les trois premiers, les scribes utilisent le terme *sépédèt* (spd.t) tandis que dans le dernier, la « lettre » p a été transformée en b : selon nos principes de transcription, nous soulignons cette différence en écrivant *sébédèt* (sbd.t). Les exercices M7 et M17 étant de même nature, il ne semble pas que ce nouveau terme désigne une quelconque spécificité du triangle. Nous y voyons plutôt un changement de « lettre » dû à la consultation de divers textes écrits à des périodes différentes ou par différents scribes.
En revanche, il se peut que les déterminatifs distincts dans les deux documents, *Papyrus Rhind* et *Papyrus de Moscou*, poussent à envisager, pour le dernier texte, la considération de triangles rectangles. En effet, dans le R51, le scribe Âhmès écrit un triangle isocèle (M44 dans la classification de Gardiner) posé horizontalement sur sa base. Comme idéogramme le signe M44 désigne une épine, une pointe et comme déterminatif il est associé à tout ce qui est aigu, pénétrant, pointu ou encore de forme triangulaire : Gardiner[103] cite à ce sujet l’expression t-HD qui désigne un pain blanc ayant cette forme. Il nous est peut-être plus difficile de déterminer le correspondant hiéroglyphique du signe dessiné par le scribe qui a rédigé le *Papyrus de Moscou*. En effet, cette fois, le triangle est « oblique » et semblable à celui de la figure du M7. Mais, en M7, le déterminatif est lacunaire : seule la pointe du triangle est lisible à la première ligne tandis que c’est la « base » qui manque dans la deuxième occurrence.. Point de signe dans la classification de Gardiner mais sans doute une marque apparentée au Z22 que nous trouvons dans des polices plus complètes comme *Hieroglyphica* (nous y trouvons aussi des formes différentes de M44, voir M176 ou M189 selon que la base du triangle isocèle est plus ou moins petite par rapport à la hauteur qui est la même) ou, plutôt, le signe de la langue de terre (N21 dans la classification de Gardiner, n°323 de Möller) :

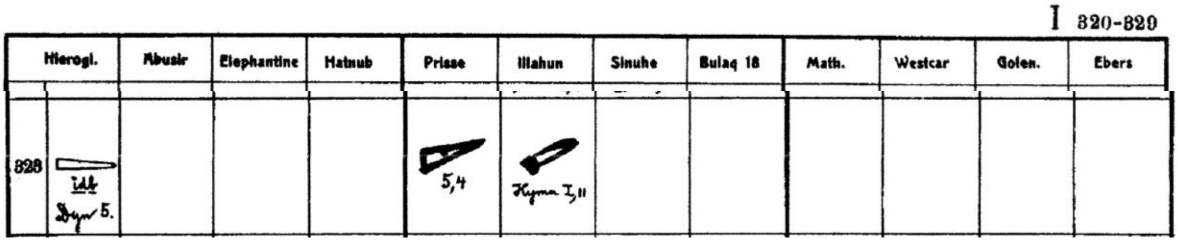

Rhind


Moscou


M44


Z22

[103] Gardiner, 1982, *Egyptian grammar*, p. 538.



I 820-829

	Hierogl.	Abusir	Elephantine	Hatnub	Prisse	Illahun	Sinuhe	Bulaq 18	Math.	Westcar	Golen.	Ebers
828	5.				5,4	[illegible] I,11						

sébédèt (sbdt)

Papyrus Struve Gunn, Peet Imhausen Michel

Sans doute en employant diverses fontes d'impression, les divers commentateurs adoptent des positions qui sont toutes différentes : triangle rectangle pour Struve[104] et A. Imhausen[105], l'angle droit en haut pour le premier et en bas pour la seconde, triangle isocèle pour M. Michel et triangle dont la « base » est verticale dans l'article de Gunn et Peet. Difficile de les départager et ce d'autant plus que le scribe est peu appliqué et que ce qui peut être décidé pour une occurrence peut être facilement pris en défaut dans un autre écrit.

2 — Si nous faisons abstraction du signe numérique écrit par le scribe pour indiquer la mesure de la superficie du triangle, le scribe emploie deux formulations différentes en M7 et M17, respectivement *nèt ahèt 2*$_m$ (n.t AH.t 2$_m$) et *nèt 2000 èm ahèt* (n.t 2000 m AH.t) auxquelles correspondent nos expressions classiques : un triangle « d'une superficie de 2 (*milles de terre*) » ou « de 2000 (*coudées de terre*) en superficie ».

3 — Le scribe qui a rédigé le *Papyrus de Moscou* précise rarement les unités métrologiques qu'il emploie. Il se contente de « notations numériques ». Ici, il écrit deux traits verticaux qui, comme la solution le laissera voir, sont la marque de 2 *milles de terre* pour indiquer la valeur de la superficie du triangle, d'où notre notation indexée 2$_m$. Tous les commentateurs se contentent de transcrire le chiffre 2. Notons que le scribe emploiera la même marque dans la figure du problème M17 tout en écrivant le chiffre 2000 à la fois dans l'énoncé et dans la résolution de cet exercice, indiquant ainsi 2000 *coudées de terre*.

4 — Contrairement aux différentes transcriptions proposées, nous considérons qu'il y a une lacune.

5 — Nous avons complété en nous aidant du problème M17.

6 — Dans les problèmes considérés, à savoir, en M7 et en M17, le terme *ahèt* (AH.t) désigne une **superficie** sans doute de terre cultivable. En M7, le scribe donne la mesure de la superficie en *milles de terre* alors qu'en M17 il l'exprime en *coudées de terre*. Ceci donne lieu, aussi, à deux formulations différentes pour son *doublement* : traduit en termes modernes, en M7 il insiste sur la superficie et en M17 sur la mesure.

[104] Struve, 1930, *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, pl. IV, XXXIII.

[105] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, pp. 310, 316.

7 — Contrairement aux différentes transcriptions proposées, nous considérons que la marque du demi est partiellement absente.

TRADUCTION

L_1 **Exemple d’une manière de faire un triangle (rectangle[1]).**

L_2 S’il t’est dit : « un triangle (rectangle) d’une superficie de 2_m[2] et d’*idèb*[3] 2 2’ ».

L_3 Tu fe<ras> ton *dou<blement>* de la superficie. Il adviendra 40. Fais 2 <2’> fois.

L_4 Il ad<viendra 100. Fais le « coin »[4]. Il adviendra 1>0. Exprime un à partir de 2 2’.

L_5 <De là, > ce qu’il adviendra, c’est 3’ 15’. Fais à 10 [5]. Il adviendra 4.

L_6 C’est 10 en « longueur »[6], pour 4 en « largeur »[7].

1 — La considération du *quotient-de-proportion* qui caractérise la forme du triangle ainsi que les termes employés pour désigner les dimensions du triangle semblables à ceux utilisés à propos des rectangles, nous donnent à penser qu’il s’agit, tant en M7 qu’en M17, d’un triangle rectangle. Notons que de nombreux commentateurs ont, pour diverses raisons, la même acception. Ainsi, Sylvia Couchoud s’appuie sur cette similitude : « *il est donc possible de tirer de ces éléments similaires la conclusion qu’un triangle au sujet duquel on utilise les termes jdb, Aw et (w)sxw qui se retrouvent tous trois dans les formules relatives aux rectangles, doit être un triangle rectangle* [106]». Par ailleurs, sans fournir d’explications, Annette Imhausen, considère pour sa part que ce que nous nommons le *quotient-de-proportion* est ici le rapport du plus grand au plus petit des côtés d’un angle droit[107]. Quant à Marianne Michel, elle inverse le propos « *parce que nous sommes dans le cas d’un triangle rectangle (p. 296), la hauteur est appelée « longueur » et la base est appelée « largeur »* [108]».

2 — Les traductions proposées sont diverses. S. Couchoud, A. Imhausen et M. Michel suivent la transcription qu’elles ont donnée, à savoir, le chiffre 2, indiquant ainsi un triangle de superficie 2 sous-entendu, 2 *milles de terre*. À l’opposé, Wasili Struve[109], Walter-Friedrich Reineke[110] et Marshall Clagett[111], ont transcrit le nombre 20 et ils le reprennent dans leur traduction. Seuls, Gunn et Peet[112], ainsi que Neugebauer[113] considèrent le *mille de terre*, tandis que Struve et Clagett ajoutent au nombre 20 la spécification entre parenthèses, *khèt carré* ou *sétchat*. Toutefois, lors des commentaires, certains auteurs sont amenés à préciser. Ainsi,

[106] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 52. Pour des références plus complètes, voir la bibliographie en fin d’étude. Sauf pour les citations, nous nous bornons à une brève indication lors de la première occurrence.

[107] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, „*In pMoskau, Nr. 7, dient es zur Bezeichnung des Verhältnisses zweier Seiten, die einen rechten Winkel einschließen, genauer, zur Bezeichnung des Verhältnisses der Längeren zur kürzeren Seite*“, p. 78.

[108] Michel, 2014, *Les mathématiques de l’Égypte ancienne*, p. 217.

[109] Struve, 1930 (1977), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*.

[110] Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter*.

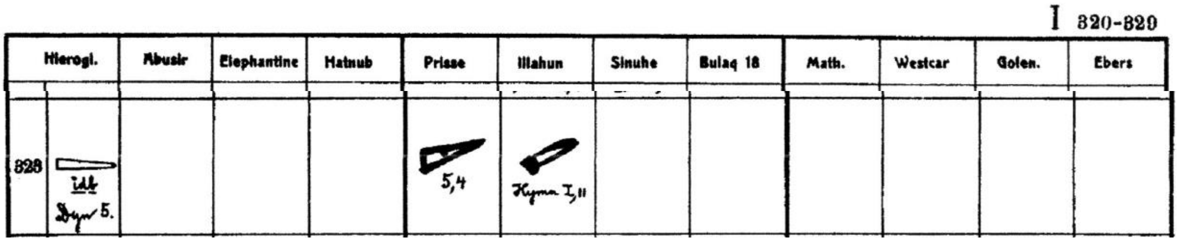
[111] Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book*, Volume Three.

[112] Gunn, Peet, 1929, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus.

[113] Neugebauer, 1931_2, Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte.

S. Couchoud souligne que « *la surface totale est donnée en dizaines d'aroures, autrement dit, en* 10^5 *coudées-carré* [114]» et M. Michel, indique aussi entre parenthèses, *l'aire étant exprimée en* kha-ta[115], c'est-à-dire, en *milles de terre*. Nous avons conservé la notation indexée 2_m pour la traduction mais retenu *2 milles de terre* lors de l'adaptation.

3 — Dans les textes mathématiques égyptiens, le terme ***idèb* (jdb)** figure seulement dans le problème M7 du *Papyrus de Moscou*. Les commentateurs hésitent à le rendre par une de ses acceptions usuelles, à savoir, « rive », « berge » ou par son emploi comme « rapport » ou « relation » entre les dimensions d'un rectangle ou d'un triangle. *A priori*, ces deux types de traduction s'excluent mutuellement. Toutefois, il nous semble que nous devons examiner en détail l'écriture de ce mot. Le scribe trace les « lettres » j, d et b et le déterminatif d'une portion de terre irriguée (N23 dans la classification de Gardiner). Or, nous savons que ce signe est une variante de la marque de la langue de terre oblique (N21 de la même classification) que le scribe utilise comme déterminatif du terme désignant un triangle. Par ailleurs, à la V^{e} dynastie, l'écriture hiéroglyphique du N21 se présente sous la forme d'un triangle rectangle aplati (voir Möller, n°323) : la langue de terre est en pente.



Il se peut donc que les scribes aient repris l'acception première des terrains en pente nommés *ibèd* (jbd) pour l'utiliser dans le contexte des triangles et, plus précisément, des triangles rectangles. Autrement dit, nous sommes dans une situation semblable à celle que nous avons trouvée dans le cas des pyramides : le *séqèd* (sqd), comme **l'*ibèd*** (jbd) est un nombre exprimant leur pente. Dans les deux cas, nous avons conservé le terme égyptien lors de notre traduction, mais dans nos adaptations ou commentaires nous parlons du *quotient-de-proportion* ou du *nombre-de-fois* caractérisant le « rapport » ou la « relation » entre les dimensions. Il semble que, comme en M7, ce terme particulier soit réservé au quotient de la plus grande dimension par la plus petite, c'est-à-dire, puisque nous pensons qu'il s'agit d'un triangle rectangle, du plus grand côté de l'angle droit par le plus petit côté de l'angle droit. Un peu comme si, aujourd'hui, il pouvait se présenter en termes de ligne trigonométrique du plus grand angle aigu du triangle rectangle.

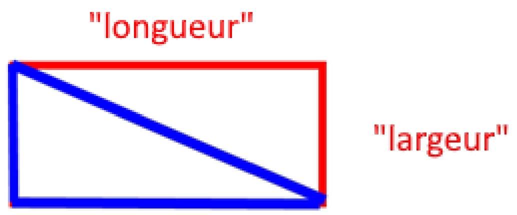
4 — Compte-tenu de l'importance de la lacune, nous avons complété par l'expression utilisée en M17, ce qui revient, pour l'instruction invitant à extraire la racine carrée, à se contenter de seulement deux signes, celui de l'œil et celui de l'angle (O38 de la classification de Gardiner) que nous avons transcrits *ir qénébèt* (jr qnb.t) et traduits par **fais le « coin »** revenant au traditionnel extrais sa racine carrée lors de notre adaptation.

5 — À propos d'une multiplication, en M7, le scribe formule une instruction particulière *ir èn 10* (jr n 10) qui donne lieu à deux interprétations selon le rôle que l'on fait jouer au nombre 10, multiplicande ou multiplicateur. Les premiers commentateurs penchent pour la première interprétation tandis que les derniers choisissent la seconde. Le scribe vient d'obtenir le

[114] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 48.
[115] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 219.

résultat d'une opération, à savoir, 1/3 1/15, et, peut-être, par une réduction d'expression, il ne formule pas de manière classique la multiplication.
Toutefois, nous devons prendre en compte le fait que les deux termes du produit sont de nature différente, fractionnaire pour 1/3 1/15 et entière pour 10. Or, de manière générale, la multiplication d'un nombre fractionnaire par un nombre entier nécessite la connaissance des doubles de nombreux quantièmes tandis que la multiplication d'un nombre entier par un nombre fractionnaire peut seulement requérir de diviser cet entier par les inverses des divers quantièmes figurant dans l'expression fractionnaire autrement dit, d'opérer avec des nombres entiers. Soucieux d'un certain Art du calcul, ceci n'a sans doute pas échappé aux scribes égyptiens d'où une formulation particulière pour demander de multiplier 10 par 1/3 1/15. Quant à la traduction, nous avons suivi l'expression littérale « **fais à 10** » et pour l'adaptation nous insistons sur la multiplication en proposant « à 10, multiplie » comme lorsque nous disons « à 10, ajoute » pour signifier, ici, que 10 est multiplié par 1/3 1/15, le résultat précédemment trouvé.

6 — Pour désigner les dimensions, hauteur et base, du triangle (rectangle), le scribe conserve les termes qui désignent celles du rectangle qui lui est circonscrit, *aou* (Aw) et *ouzékhou* (wzxw) que nous traduisons respectivement par **« longueur »** et **« largeur »**.



En fait, nous avons quelques difficultés à la fois de reproduction de la figure et de traduction. En effet, en général les rectangles reposent sur leur longueur. Ici, en M7, la hauteur est plus grande que la base de telle sorte que le rectangle associé devrait reposer sur la largeur. Conservant la signification des termes égyptiens nous avons opté pour « longueur » et « largeur » entre guillemets tant pour la traduction que pour l'adaptation, évitant de revenir aux termes spécifiques au triangle quelconque, à savoir, hauteur et base.

ADAPTATION

Exemple d'une manière de procéder pour un triangle (rectangle).

S'il t'est dit : « un triangle (rectangle) d'une superficie de 2 *milles de terre* et de *quotient-de-proportion* 2 1/2 ».

Tu doubleras la superficie. Il en résultera 40. Multiplie par 2 1/2.

Il en résultera 100. Extrais sa racine carrée. Il en résultera 10. Inverse 2 1/2.

Il en résultera : 1/3 1/15. À 10, multiplie. Il en résultera 4.

C'est 10, en « longueur », par 4, en « largeur ».

COMMENTAIRE

L’énoncé

Exemple d’une manière de procéder pour un triangle (rectangle).

S’il t’est dit : « un triangle (rectangle) d’une superficie de 2 *milles de terre* et de *quotient-de-proportion* 2 1/2 ».

Les problèmes M7 et M17 du *Papyrus de Moscou* ont trait à un même triangle rectangle dont nous connaissons la mesure de la superficie et le *quotient-de-proportion*, à savoir, en M7, le « rapport » du plus grand côté de l’angle droit au plus petit côté, soit, 2 1/2, tandis qu’en M17, c’est le « rapport » du plus petit au plus grand, donc l’inverse du « rapport » précédent, c’est-à-dire, 1/3 1/15, d’après l’expression classique du double du quantième 1/5 :

$$Q = 2 + \frac{1}{2} \quad , \quad \bar{Q} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} .$$

Ces deux exercices sont donc différents du problème M6 du *Papyrus de Moscou* et d’une partie du *UC 32162-1 d’El-Lahoun* qui ont trait à des rectangles tout en étant relatifs au même type de données, mesure de la superficie et *quotient-de-proportion* des dimensions principales. Mais, ici, dans ces exercices, le scribe a quitté le cadre pythagoricien des problèmes précités, pour mettre en valeur l’expression du double du quantième 1/5, à savoir, 1/3 1/15, que nous trouvons lors des *expressions de 2 à partir de 5* dans le *Papyrus Rhind* et dans le *Fragment UC 32159 d’El-Lahoun*. Nous prendrons acte de cette propriété particulière dans certains commentaires généraux. Le scribe semble insister sur ce point en employant le terme *idèb* (jdb) que nous rendons, lors de notre adaptation, par *quotient-de-proportion*.

Tant en M7 qu’en M17, le scribe introduisant dans la procédure le calcul du double de la superficie du triangle, nous pouvons situer ces problèmes ainsi que l’exercice M6 et une partie du *UC 32162-1 d’El-Lahoun*, dans un même cadre algébrique, celui de la résolution, dans la structure numérique égyptienne, d’un système de deux équations à deux inconnues entières pour lesquelles on donne leur produit et une relation linéaire entre elles :

$$xy = P \quad \text{et} \quad y = Qx .$$

Dans le cas du M7, ceci revient à considérer le système :

$$xy = 40 \quad \text{et} \quad y = \left(2 + \frac{1}{2}\right)x .$$

Aujourd’hui, nous pouvons écrire immédiatement les égalités successives suivantes conduisant à la solution :

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)x^2 = 40 \;,\; x^2 = 40 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 16 \quad , \quad x = \sqrt{16} = 4 \quad , \quad y = 4 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 10$$

Bien sûr, le scribe ne procède pas de cette manière, mais il prend soin de donner une procédure différente de celle qu'il a employée en M6 tout en utilisant l'inversion du *quotient-de-proportion*. Il semble que l'utilisation d'un nouvel algorithme soit due au fait que le *quotient-de-proportion* soit supérieur à 1. Cette procédure sera utilisée, beaucoup plus tard, par les scribes égyptiens qui résoudront des problèmes semblables rédigés en démotique, preuve, s'il le fallait, de l'importance qu'ils leur accordent.

En fait, théoriquement[116], compte-tenu de la valeur du *quotient-de-proportion* ou de son inverse, on peut montrer que si les mesures des dimensions principales des triangles, objets des problèmes M7 et M17, sont des nombres entiers, alors, elles sont proportionnelles aux nombres 2 et 5. Il n'est donc pas exclu que, pour fabriquer les énoncés afférents, le scribe ait commencé par considérer deux tels nombres, puis en aient fait leur produit qui divisé par deux leur a donné la superficie du triangle rectangle permettant d'établir l'énoncé correspondant en prenant, pour *quotient-de-proportion*, soit, comme en M7, le résultat de la division de 5 par 2, c'est-à-dire, 2 1/2, soit, comme en M17, l'expression classique du double de 1/5, à savoir, 1/3 1/15. Quoiqu'il en soit, cette manière de procéder dénote, pour l'époque, des réflexions mathématiques approfondies.

Notre adaptation précise le contexte métrologique dans lequel le scribe situe le problème : la superficie du triangle est égale à 2 *milles de terre*. Nous en avons fait l'écho dans la note 3 de notre transcription vocalisée et dans la note 1 de notre traduction. Tant en M7 qu'en M17, ceci relève de l'implicite. Ici, dans l'énoncé, en lisant les deux traits verticaux du chiffre 2, nous devons comprendre que la superficie est bien égale à 2 unités de mesure de superficie. En revanche, lors de la solution, le scribe est amené à doubler la superficie et il donne le nombre 40 comme résultat ce qui implique la considération d'une autre mesure de superficie qui vaut le dixième de l'unité précédente. Or, nous savons qu'un *mille de terre* vaut 10 *sétchat* ou, en termes « modernes », 10 *khèt carrés* en prenant le *khèt* comme unité de longueur soit 52 mètres environ. Nous pouvons donc en déduire que la première unité de mesure de superficie est le *mille de terre* tandis que lors du *doublement* c'est la *sétchat* qui est considérée. Raisonnant donc en *khèt* et *sétchat*, nous avons les données suivantes :

mesure T_s de la superficie en *sétchat* du triangle (rectangle) :

$$T_s = Ll \times \frac{1}{2} = 20,$$

quotient-de-proportion Q des dimensions en *khèt* du triangle (rectangle) :

$$L = l \times Q = l \times \left(2 + \frac{1}{2}\right).$$

Le calcul du double de la mesure, en *sétchat*, de la superficie

Tu doubleras la superficie. Il en résultera 40.

[116] Voir l'annexe à la fin des commentaires.

Afin, sans doute, de se ramener au rectangle circonscrit au triangle rectangle, le scribe invite à doubler la superficie du triangle ce qui revient à obtenir la mesure R_s, en *sétchat*, de la superficie de ce rectangle :

$$20 \times 2 = 40 = T_s \times 2 = Ll = R_s \,.$$

Contrairement à ce qu'écrit M. Michel[117], le scribe ne convertit pas *tout d'abord* l'aire du triangle en *sétchat*. Ce travail est implicite. En revanche, il est clair que si nous incluons la donnée de la superficie en *milles de terre*, nous devons retenir explicitement cette conversion dans notre traduction algorithmique de la solution proposée par le scribe. A. Imhausen entretient une certaine confusion en transcrivant et traduisant à l'aide du chiffre 2 mais en retenant 20 comme donnée[118]. En fait, c'est en suivant pas à pas la solution écrite par le scribe que nous pouvons déterminer les unités métrologiques employées. Ici, le 2 de l'énoncé s'est transformé implicitement en 20, ce qui nous a amenés à prendre en compte une superficie de 2 *milles de terre* soit encore de 20 *sétchat*.

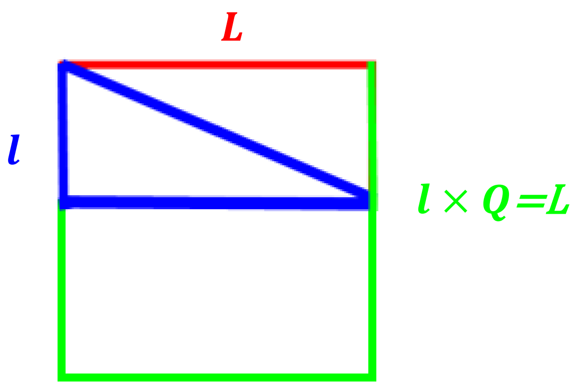
Le calcul du carré de la mesure, en *khèt*, de la « longueur »

Multiplie par 2 1/2. Il en résultera 100.

Puisque 2 1/2 est la valeur du *quotient-de-proportion*, nous pouvons écrire :

$$40 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 100 = R_s \times Q = (L \times l) \times Q = L \times (l \times Q) = L \times L = L^2 \,.$$

Nous voyons qu'en multipliant par le *quotient-de-proportion* nous avons obtenu la valeur, en *sétchat*, donc en *khèt carrés*, du carré de la mesure, en *khèt*, de la « longueur » du triangle (rectangle). En fait, nous pouvons ici retenir ce que disaient Gunn et Peet[119] à propos de ce problème. En multipliant la « largeur » par le *quotient-de-proportion* supérieur à 1, on obtient la « longueur », mais, du point de vue des superficies, le rectangle circonscrit s'est transformé en le carré construit sur la « longueur » puisque son aire est le carré de la mesure de la « longueur ».



[117] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 219.
[118] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, pp. 316 et 78.
[119] Gunn, Peet, 1929, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, p. 169.

Notons que cette multiplication est immédiate :

1	40	(initialisation)
\ 2	80	(*doublement*)
\ 1/2	20	(*dédoublement*)
Total	100	$(80 + 20 = 100)$

Le calcul de la mesure, en *khèt,* de la « longueur »

> Extrais sa racine carrée. Il en résultera 10.

Nous avons immédiatement

$$\sqrt{100} = 10 = \sqrt{L^2} = L\,.$$

En prenant la racine carrée du résultat précédent, nous obtenons la mesure, en *khèt*, de la « longueur » du triangle (rectangle). Nous pouvons constater que cette valeur est très simple car il en est de même de son carré qui vaut 100. Bien sûr, ceci ajoute une contrainte pour la fabrication du problème. Aujourd'hui, partant théoriquement du carré 100, on obtient 10 comme racine carrée, produit des nombres 2 et 5 qui conduisent au *quotient-de-proportion* choisi par le scribe. Il n'est pas interdit de penser que l'énoncé « élémentaire » donné par le scribe soit le fruit de divers essais ou recherches visant à simplifier les calculs. Au lieu du nombre 5 conduisant au double de son quantième, il n'a pas pris, par exemple, le nombre 13 !!!

Une opération *a priori* insolite : le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*

> Inverse 2 1/2. Ce qui en résulte est 1/3 1/15.

Aujourd'hui, sous une forme opératoire, nous pouvons dire que l'instruction donnée par le scribe consiste à inverser le *quotient-de-proportion*, d'où notre adaptation. Mais nous ne savons pas comment il faut opérer. Compte-tenu de l'expression particulière du *quotient-de-proportion* qui est donnée, il nous semble que deux attitudes sont possibles.

Pour la première, nous pouvons nous situer dans le strict domaine opératoire et il s'agit alors de diviser 1 par le *quotient-de-proportion*, comme le scribe a pu le laisser entendre ailleurs dans certaines formulations, voir, par exemple, en M17. Autrement dit, ici, on doit diviser 1 par 2 1/2, c'est-à-dire, diviser un nombre entier, en l'occurrence, 1, par un nombre fractionnaire, à savoir, 2 1/2. Nous le savons, pour un scribe égyptien, ce type d'opération est assez complexe et le *Papyrus Rhind* nous en donne quelques témoignages, en particulier, avec l'exemple R31. Puisque 1/3 est le premier quantième du résultat, on peut commencer la division en considérant tout d'abord le multiplicateur 2/3 ce qui conduit à écrire :

1	2 1/2	(initialisation)
2/3	1 2/3	(calcul ou *table de deux-tiers*)
\ 1/3	1/2 1/3	(*dédoublement*)
Manque	1/6	($\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}=1$)
\ 1/15	1/6	

La principale difficulté réside alors dans la considération du quantième 1/15. En fait, ici, on peut procéder de manière élémentaire puisque le manque est réduit à un quantième, à savoir 1/6. Dès lors, on prend l'inverse de ce manque comme multiplicateur du diviseur et le résultat est le nombre entier cherché qu'il suffit d'inverser :

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 6 = 15 \quad , \quad \left(2+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{15}=\frac{1}{6}.$$

Bien sûr, on peut emprunter une voie plus générale comme celle suivie dans l'exemple R31 précité. Elle consiste à utiliser la procédure que nous appelons des *auxiliaires numériques*, sorte de palliatif à nos réductions au même dénominateur. Ainsi, pour 2 1/2, à notre dénominateur commun 2 va correspondre ce que nous appelons le *référent commun* 2 qui doit être multiplié par 2 1/2, de manière à donner un résultat entier, l'*auxiliaire numérique* qui en résulte n'est autre que notre numérateur, 5 :

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 2 = 5 \quad \text{ou} \quad 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\times 5.$$

Ceci peut permettre au scribe d'affirmer, par inversion, que le produit de 2 1/2 par 1/5 est 1/2 :

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{1}{2}.$$

Surtout, il doit alors raisonner en demi. Il doit donc exprimer le *manque*, c'est-à-dire, 1/6, en demi. C'est 1/3 de 1/2 :

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}.$$

Par suite, le multiplicateur 1/15, égal au 1/3 de 1/5 comblera le *manque* 1/6 :

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{15}=\left(2+\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\right)=\left[\left(2+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{5}\right]\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{6}.$$

D'où le résultat donné par le scribe :

$$1 : \left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}.$$

Autrement dit, nous pouvons avoir la présentation complète suivante

	1	2 1/2
	2/3	1 2/3
\	1/3	1/2 1/3
Manque		1/6
		1/3
	1/5	1/2
	1/3 de 1/5	1/3 de 1/2
\	1/15	1/6

	1	2
\	2	4
\	1/2	1
Total		5

$$2 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 5$$

$$1 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

Une constatation s'impose : l'opération n'est pas simple et nous verrons que l'on peut procéder de manière plus aisée. En fait, nous venons de conduire la division de 1 par 2 1/2 en nous appuyant sur le résultat donné par le scribe. Mais nous pouvons aussi remarquer que cette opération est plus immédiate si nous utilisons les *dédoublements successifs* :

	1	2 1/2	(initialisation)	
	1/2	1 1/4	(*dédoublement*)	
\	1/4	1/2 1/8	(*dédoublement*)	
Manque		1/4 1/8	1	2 1/2
	1/5	1/2	2	5
\	1/10	1/4	\ 4	10
\	1/20	1/8	\ 8	20

$$1 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}.$$

Certes, nous obtenons ainsi un résultat comportant trois quantièmes alors que l'expression donnée par le scribe est réduite à deux quantièmes, mais l'opération est plus facile à conduire et il en est de même du calcul suivant où 10 serait multiplié par ce nombre

$$10 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) = \left(10 \times \frac{1}{4}\right) + \left(10 \times \frac{1}{10}\right) + \left(10 \times \frac{1}{20}\right) = \left(2 + \frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{1}{2} = 4\,.$$

Il nous semble donc que nous devons adopter une attitude différente qui se situe en dehors du cadre général de la division et nous placer dans celui de l'inversion et du *nombre-de-fois*. Le scribe sait que si le *quotient-de-proportion* est égal à 2 1/2, alors la mesure de la

« longueur » est 2 1/2 fois celle de la « largeur » et que, par inversion, il en déduit que la mesure de la « largeur » sera 1/3 1/15 fois celle de la « longueur ». En fait, la mesure de la « longueur » est un *nombre-de-fois* celle de la « largeur », à savoir, la moitié de 5 :

$$L = l \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = l \times \left(5 \times \frac{1}{2}\right).$$

Par suite, par inversion, l'inversion du produit étant le produit des inverses, la mesure de la « largeur » est un *nombre-de-fois* égal au double du quantième 1/5 soit selon son expression classique, 1/3 1/15, celle de la « longueur » :

$$l = L \times \left(\frac{1}{5} \times 2\right) = L \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right).$$

En utilisant une formulation différente de celle employée dans les autres problèmes, le scribe semble vouloir nous pousser à adopter cette deuxième interprétation. D'une part, il utilise le verbe *nis* (njs) que nous rendons par exprimer, terme que nous retrouvons dans le *Papyrus Rhind* pour les *expressions de 2 à partir d'un entier*, donc, en particulier pour obtenir les expressions des doubles des quantièmes impairs, et, d'autre part, pour formuler le résultat il abandonne la forme classique du futur *khépér.khèr* (xpr.xr), soit, « il en résultera », pour *khépérèt im pou* (xpr.t im pou), c'est-à-dire, « ce qui en résulte, est » qui peut être rendue par le présent comme s'il fallait utiliser un résultat classique.

Le calcul de la mesure, en *khèt,* de la « largeur »

À 10, multiplie. Il en résultera 4. C'est 10, en « longueur », par 4, pour la « largeur ».

Aujourd'hui, nous pouvons vérifier qu'il ne reste plus qu'à effectuer le produit de la mesure de la « longueur », à savoir, 10 par l'inverse du *quotient-de-proportion* que nous venons de trouver et de :

$$\bar{Q} \times L = L \times \bar{Q} = \frac{l}{L} \times L = L \times \frac{l}{L} = l = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) \times 10 = 10 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = 4\,.$$

Par conséquent, la mesure, en *khèt*, de la « largeur » du triangle (rectangle) est égale à 4.

Toutefois, nous savons que, dans la pratique, pour les scribes égyptiens, la multiplication n'est pas commutative. Autrement dit, il faut déterminer quels sont les multiplicateur et multiplicande du produit à effectuer. Or, le scribe utilise une instruction particulière, *ir èn 10* (jr n 10), qui donne lieu à deux interprétations selon le rôle que l'on fait jouer au nombre 10, multiplicande ou multiplicateur. Les premiers commentateurs penchent pour la première interprétation tandis que les derniers choisissent la seconde. Le scribe vient d'obtenir le résultat d'une opération, à savoir, 1/3 1/15, et, peut-être, par une réduction de langage, il ne formule pas de manière classique la multiplication que l'on doit effectuer.

Mais, il nous semble que nous devons aussi prendre en compte le fait que les deux termes du produit sont de nature différente, fractionnaire pour 1/3 1/15 et entière pour 10. Or, de manière générale, la multiplication d'un nombre fractionnaire par un nombre entier nécessite la connaissance des doubles de nombreux quantièmes tandis que la multiplication d'un nombre entier par un nombre fractionnaire peut seulement requérir de diviser cet entier par les inverses des divers quantièmes figurant dans l'expression fractionnaire, autrement dit, d'opérer avec des nombres entiers. Soucieux d'un certain Art du calcul, ceci n'a sans doute pas échappé aux scribes égyptiens d'où une formulation particulière pour demander de multiplier 10 par 1/3 1/15, nombre qui vient d'être trouvé. Par ailleurs, dans les autres exemples, c'est cette manière de procéder qui est mise en œuvre. Raison supplémentaire pour considérer le nombre entier 10 comme multiplicande. Quant à la traduction, nous avons retenu l'expression littérale « **fais à 10** » et pour l'adaptation nous insistons sur la multiplication en proposant « à 10, multiplie » comme lorsque nous disons « à 10, ajoute » pour signifier que 10 est multiplié par 1/3 1/15, le résultat précédemment trouvé. Plus simplement, nous aurions pu dire « qui multiplie 10 ».

Afin de préciser notre propos, commentons certaines manières de procéder. Commençons par la multiplication de 1/3 1/15 par 10. Nous pouvons l'effectuer comme suit :

	1	1/3 1/15	(initialisation)
\	2	2/3 1/10 1/30	(*doublement* et R2/15)
	4	1 1/3 1/5 1/15	(*doublement*)
	8	2 2/3 1/3 1/15 1/10 1/30	(*doublement* et R2/5 et R2/15)
\	8	3 1/10 1/15 1/30	(réduction)
	Total	4	

Pour le total, en effectuant la réduction de 1/5 1/10 1/30 en 1/3, abondamment utilisée implicitement dans le *Papyrus Rhind* (voir, en particulier, en R1) nous avons successivement :

$$3+\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{15}+\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{30}\right)=3+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15}\right)=$$
$$=3+\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)=3+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=3+1=4\,.$$

Quant à la multiplication de 10 par 1/3 1/15, elle pourrait s'effectuer plus facilement, comme suit, c'est-à-dire, sans recours aux *doublements* des quantièmes 1/5 et 1/15 :

	1	10	(initialisation)
	2/3	6 2/3	(*table de deux-tiers*)
\	1/3	3 1/3	(*dédoublement*)
	1/10	1	(division par dix)
	1/5	2	(*doublement*)
	2/3 de 1/5	1 1/3	(*table de deux-tiers*)
	1/3 de 1/5	2/3	(*dédoublement*)
\	1/15	2/3	(réduction)
	Total	4	

Notons que, dans les deux opérations, les calculs ont été facilités par le fait que le quantième 1/15 est inverse d'un multiple de 3, d'où, aujourd'hui, les égalités suivantes :

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\quad,\quad 10\times\frac{1}{15}=10\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\right)=\left(10\times\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{3}=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

et

$$\frac{1}{15} \times 2 = \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}\right) \times 2 = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{3} \times 2\right) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5 \times 2} + \frac{1}{5 \times 6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}.$$

En fait, de manière générale, pour le type de cette dernière multiplication, à savoir, multiplication d'un nombre entier par une somme de quantièmes, on peut aussi diviser le multiplicateur par chacun des inverses des quantièmes figurant dans la somme. Ici, il faut diviser 10 par 3 et par 15 ce qui est immédiat :

$$10 : 3 = 3 + \frac{1}{3} \quad et \quad 10 : 15 = \frac{2}{3}\ .$$

D'où le résultat

$$\left(3 + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} = 3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 3 + 1 = 4\ .$$

D'autres procédures

Nous pouvons remarquer que l'expression du *quantième-de-proportion* est simple, à savoir, la somme d'un nombre entier et de 1/2, tandis que celle de son inverse est plus complexe car elle est la somme de deux quantièmes dont l'un est en quelque sorte, quelconque. Il en résulte que, de manière générale, la multiplication ou la division d'un nombre entier par ce type de *quotient-de-proportion* est plus simple à effectuer que les mêmes opérations avec son inverse. Dès lors, nous pouvons nous attendre à trouver des procédures plus simples que celle suivie par le scribe pour résoudre le problème M7. Il suffit de considérer celles qui n'utilisent pas le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*. Pour les définir, de manière générale, nous nous situons dans une perspective algébrique consistant à déterminer, dans la structure numérique égyptienne, la solution du système

$$xy = P \quad \text{et} \quad y = x \times Q\ .$$

Dans le M7, nous avons

$$P = 40 \quad , \quad Q = 2 + \frac{1}{2} \quad , \quad \bar{Q} = \frac{1}{Q} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Aujourd'hui, nous obtenons immédiatement les diverses expressions suivantes de la solution :

$$x = \sqrt{\frac{P}{Q}} = \sqrt{P \times \frac{1}{Q}} = \sqrt{\frac{1}{Q} \times P} = \sqrt{P : Q} = P : y = \frac{y}{Q} = y : Q = y \times (1 : Q) = (1 : Q) \times y\ ,$$

$$y = \sqrt{Q \times P} = \sqrt{P \times Q} = Q \times x = x \times Q\ .$$

Nous pouvons considérer que la solution proposée par le scribe en M7 revient à écrire

$$y = \sqrt{P \times Q} \quad , \qquad x = y \times \bar{Q} \,,$$

autrement dit, à obtenir d'abord y, puis l'autre dimension, x, à partir du calcul du *quotient-de-proportion* inverse.

Une première procédure différente de celle employée par le scribe consiste, pour le calcul de la deuxième dimension, à remplacer la multiplication par l'inverse $\bar{Q}$ du *quotient-de-proportion* Q par la division directe de y par ce *quotient-de-proportion*. Dans ce cas nous avons :

$$y = \sqrt{P \times Q} = 10 \quad , \quad x = y : Q = 10 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 4.$$

Puisque l'expression du *quotient-de-proportion* est simple, à savoir, la somme d'un nombre entier et de 1/2, la multiplication ou la division d'un nombre entier par ce nombre sont élémentaires. Nous l'avons vu pour la multiplication de 40 par 2 1/2, et il en est de même pour la division de 10 par 2 1/2 :

	1	2 1/2	(initialisation)
	2	5	(*doublement*)
\	4	10	(*doublement*)

Par conséquent, cette procédure est plus simple que celle suivie par le scribe.

Tout aussi simple est l'obtention de l'autre dimension à partir du calcul précédent de la mesure de la superficie du rectangle circonscrit. Dans ce cas nous avons :

$$y = \sqrt{P \times Q} = 10 \quad , \quad x = P : y = 40 : 10 = 4 \,.$$

En effet, la division de 40 par 10 est tout aussi immédiate

	1	10	(initialisation)
	2	20	(*doublement*)
\	4	40	(*doublement*)

Un autre type de procédure revient à inverser l'ordre de calcul des dimensions, c'est-à-dire, à déterminer d'abord x puis y et à expliciter celle qui revient à écrire

$$x = \sqrt{P : Q} = \sqrt{40 : \left(2 + \frac{1}{2}\right)} = 4 \quad , \quad y = Q \times x = x \times Q = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \times 4 = 10 \,.$$

Nous devons alors commencer par effectuer la division de P par Q, c'est-à-dire de 40 par 2 1/2, opération qui, encore, ici, est immédiate :

	1	2 1/2	(initialisation)
	2	5	(*doublement*)
	4	10	(*doublement*)
	8	20	(*doublement*)
\	16	40	(*doublement*)

Bien sûr, puisque le *quotient-de-proportion* est élémentaire, à savoir, 2 1/2, les autres opérations que l'on doit effectuer sont toutes aussi immédiates.

En guise de conclusion

En demandant de calculer le double de la superficie d'un triangle (rectangle), on peut considérer que le cadre principal du problème M7 est le même que celui que nous lisons dans la dernière partie du *Fragment UC 32 162 d'El-Lahoun* et dans l'exercice M6. Toutefois la procédure suivie en M7 est différente de celle de ces derniers problèmes.

En termes *arithmétiques*, nous pouvons considérer qu'il s'agit de trouver les dimensions d'un triangle (rectangle), dont on connaît leur *produit* en tant que double de la mesure de sa superficie et leur *quotient* que nous appelons *quotient-de-proportion* car caractérisant la forme du triangle comme le *séqèd* caractérise la forme des pyramides. Ceci nous conduit à penser que le scribe considère un triangle rectangle car les dimensions traditionnelles, à savoir, base et hauteur, pour calculer la superficie d'un triangle ne suffisent pas pour caractériser la forme d'un triangle quelconque. Pour nous en convaincre, le scribe conserve les termes employés pour désigner la longueur et la largeur d'un rectangle. Dans nos traductions ou adaptations, nous mettons entre guillemets ces dimensions.

En fait, d'un point de vue *numérique*, dans le cas de ces problèmes de dimensions, le *quotient-de-proportion* est sans doute envisagé comme étant le *nombre-de-fois* Q que la mesure d'une dimension est celle de l'autre. L'exercice M7 est particulier car il s'agit du *nombre-de-fois* que la mesure L de la « longueur » est celle de la « largeur » l :

$$L = l \times Q ,$$

le calcul de son inverse permettant d'obtenir le *nombre-de-fois* que la mesure de la « largeur » est celle de la « longueur » :

$$l = L \times \bar{Q} .$$

Ce sont les deux relations fondamentales entre ces deux dimensions qui conduisent les scribes à ne pas considérer, par exemple, la donnée du produit, sous la forme de la mesure de la superficie du rectangle circonscrit, quand il s'agit de déterminer la mesure de la « largeur » lorsque celle de la « longueur » est connue. Ici, la particularité du *nombre-de-fois* tient au fait que ce nombre est supérieur à 1, ce qui est, sans doute la source d'une procédure distincte de celle suivie dans les trois autres problèmes. On peut directement déterminer la mesure de la « longueur ».

Aujourd'hui, nous pouvons dire que ce *nombre-de-fois* est le ressort principal de la procédure employée. Situé dans un cadre *géométrique,* il permet, ici, de relier les données arithmétiques du problème, produit et quotient, sous la forme de la mesure de la superficie du rectangle circonscrit et du *quotient-de-proportion*, comme on peut le voir dans ce que certains historiens des mathématiques appellent l'algèbre géométrique babylonienne ou grecque. Plaçons-nous dans une situation élémentaire, à savoir, celui d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur qui peut être celui de la figure du problème M6. Il est clair que sa superficie est le double de celle du carré dont la mesure du côté est celle de la largeur du rectangle. Plus généralement, et c'est là que la géométrie permet d'étendre les nombres entiers considérés aux nombres rationnels, si la mesure de la longueur est un *nombre-de-fois* Q, entier ou rationnel, celle de la largeur, la mesure de la superficie de ce rectangle est Q fois la mesure de la superficie du carré dont la mesure du côté est celle de la largeur. Autrement dit, de manière encore plus générale, si on multiplie la mesure d'un côté d'un rectangle par un nombre entier ou rationnel, la mesure de la superficie du rectangle obtenu est celle du rectangle initial multipliée par ce nombre. En fait, les scribes utilisent la « relation inverse », à savoir, que multiplier la mesure de la superficie d'un rectangle par un nombre, entier ou rationnel, revient à considérer la mesure de la superficie du rectangle obtenu en multipliant une de ses dimensions par ce nombre. Plus précisément, dans les problèmes de dimensions que nous examinons les scribes prennent comme nombre multiplicateur, le *nombre-de-fois* que la mesure de la longueur est celle de la largeur. Ici en M7, il est donné de sorte que nous pouvons écrire la suite des égalités suivantes :

$$P \times Q = (L \times l) \times (L : l) = L \times [l \times (L : l)] = L \times L = L^2 .$$

Il ne reste plus qu'à extraire la racine carrée du résultat ainsi calculé pour obtenir la mesure de la longueur du rectangle circonscrit soit, la « longueur » du triangle (rectangle). Dans les problèmes de dimensions que nous considérons ces racines carrées sont des nombres entiers simples, ici 10, qui peuvent être obtenues au moyen de tables. Il semble qu'au début du deuxième millénaire avant notre ère, les scribes égyptiens n'utilisaient pas des approximations de racines carrées ce qui impose des conditions pour les données du problème. Il en ressort que celui-ci est fabriqué à partir des données qui, en l'occurrence, ici, sont liées aux expressions des doubles de quantièmes impairs. Le *nombre-de-fois* est particulier : il est la somme d'un nombre entier et du quantième binaire élémentaire 1/2. Autrement dit, il a une expression simple ce qui, en général, n'est pas le cas de son inverse puisque c'est le double d'un quantième impair. Nous retrouverons cet inverse en M17, cette fois comme *quotient-de-proportion*. Néanmoins, comme dans les autres problèmes de dimensions que nous considérons, tout en donnant une procédure particulière, le scribe fait intervenir cet inverse ce qui, à nos yeux d'aujourd'hui, ne s'impose pas. En effet, dans ce cas, il existe des modes de résolution plus simples.

Mais, le problème M7 est le seul où le scribe donne un nom, *idèb* (jdb), à ce que nous appelons le *quotient-de-proportion*. Il semble que ceci ne soit pas fortuit. Pour caractériser la forme d'un triangle rectangle, le scribe doit préciser l'ordre des dimensions, plus précisément, que le *nombre-de-fois* est celui que la mesure de la « longueur » est celle de la « largeur », comme aujourd'hui nous choisirions une ligne trigonométrique du plus grand angle du triangle rectangle. Nous venons de souligner que ceci permet aussi de mieux justifier l'heuristique géométrique utilisée pour calculer la mesure de la « longueur ».

Pour simplifier, nous pouvons supposer que le double *du quotient-de-proportion* est égal à un nombre premier impair p

$$2Q = p ,$$

et que la mesure T_m de la superficie du triangle (rectangle)vérifie la relation suivante où t est un nombre entier quelconque :

$$10T_m = pt^2 .$$

Avec ces hypothèses, nous pouvons formuler l'énoncé général suivant :

> Calculer les mesures, en *khèt*, d'un triangle rectangle dont on connaît la superficie T_m en *milles de terre* et le *quotient-de-proportion* Q supérieur à 1 des dimensions.

Quant à l'algorithme de résolution, nous pouvons le décrire comme suit :

Données	D_1	T_m	Mesure de la superficie du triangle en *milles de terre*
	D_2	$Q = L : l > 1$	*Quotient-de-proportion* ou *nombre-de-fois* que la mesure de la « longueur » est celle de la « largeur »
		$L = l \times Q$ $_Q$	
(1)	$D_1 \times 10$	$T_s = T_m \times 10$	Mesure de la superficie, en *sétchat*, du triangle
(2)	$(1) \times 2$	$R_s = T_s \times 2$	Mesure de la superficie, en *sétchat*, du rectangle circonscrit
(3)	$(2) \times D_2$	$L^2 = R_s \times Q$	Carré de la mesure de la « longueur »
(4)	$\sqrt{(3)}$	$L = \sqrt{L^2}$	Mesure, en *khét*, de la « longueur »
(5)	$\overline{D_2}$	$\bar{Q} = 1 : Q$	Calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*
(6)	$(4) \times (5)$	$l = L \times \bar{Q}$	Mesure, en *khét*, de la « largeur »

Avec la forme supposée des données, nous avons successivement :

$$Q = \frac{p}{2} = \frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2} = \frac{L}{l} \quad , \qquad 10T_m = t^2(2n+1) ,$$

$$T_s = T_m \times 10 = t^2(2n+1) \quad , \quad R_s = T_s \times 2 = 2t^2(2n+1) \ ,$$

$$L^2 = R_s \times Q = t^2(2n+1)^2 \ , \ L = \sqrt{L^2} = t(2n+1) \ ,$$

$$\bar{Q} = 1 : Q = \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{p} \quad , \qquad l = L \times \bar{Q} = 2t .$$

Bien entendu, l'écriture des deux dernières égalités cache les difficultés opératoires que nous avons soulignées, d'une part, pour calculer l'inverse $\bar{Q}$ du *quotient-de-proportion* et, d'autre part, pour multiplier la mesure de la « longueur » par cet inverse. Pour donner un exemple, le lecteur peut prendre le cas où le *quotient-de-proportion* est la moitié de 19, soit 9 1/2 et, d'après le *Papyrus Rhind*, ou le *Fragment UC 32159 d'El-Lahoun*, l'expression 1/12 1/76 1/114 est celle du double du quantième 1/19 :

$$\frac{19}{2} = 19 : 2 = 9 + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 : \left(9 + \frac{1}{2}\right) = 1 : \frac{19}{2} = \frac{2}{19} = \frac{1}{19} \times 2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}.$$

En d'autres termes, d'un point de vue opératoire, la procédure employée par le scribe peut être considérée comme n'étant pas représentative de l'Art égyptien du calcul. Tant le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion* que celui de la mesure de la « largeur » du triangle (rectangle) font intervenir des opérations qui ne sont pas simples à effectuer. En revanche, le calcul de la mesure de la « largeur » par division directe est immédiat :

$$l = L : Q = [t(2n+1)] : \left(n + \frac{1}{2}\right) = 2t.$$

Beaucoup plus tard, dans les papyrus démotiques, le *nombre-de-fois* est supérieur à 1 et la procédure suivie sera celle qui est employée en M7. Cette fois les solutions sont approchées et, dès lors, on opère avec des expressions fractionnaires assez complexes. N'oublions pas aussi que les scribes utilisent alors des approximations de racines carrées. Autrement dit, le contexte a considérablement changé mais la primeur du calcul de la mesure de la longueur ainsi que l'utilisation de l'inverse du *quotient-de-proportion* pour calculer la mesure de la largeur demeurent.

Bibliographie

ARCHIBALD Raymond Clare, 1927, Bibliography of Egyptian Mathematics with special references to the Rhind Mathematical Papyrus and sources of interest in its study *in* Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 178-179, 187-188.

CANTOR Moritz, 1880-1907, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Teubner, vol. 1, 1880, 3ème éd. 1907 ; vol. 2, 1894.

CHACE Arnold et *alii*, 1927-1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, *British Museum 10057 and 10058*, 2 vol., Oberlin, Mathematical Association of America, 1927-1929.

CLAGETT Marshall, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book*, Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics, Philadelphie, American Philosophical Society, 1999, 215, 388,

COUCHOUD Sylvia, 1993, *Mathématiques égyptiennes,* Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique, Paris, Éditions Le Léopard d'or, 1993 ; pp. 47-48.

GILLINGS Richard, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, Cambridge, The Massachusetts Institute of Technology, 1972 ; réimp., New York, Dover, 1982.

GUNN Battiscombe, PEET Eric, 1929, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, *The Journal of Egyptian Archaeology* 15 (1929) 167-185, pp. 171-174.

IMHAUSEN Annette, 2003, *Ägyptische Algorithmen*. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathematischen Aufgabentexten, Wiesbaden, Harrassowitz Verlag, 2003.; pp. 78-79, 83-84, 316.

MICHEL Marianne, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, Numération, métrologie, arithmétique, géométrie et autres problèmes, Bruxelles, Éditions Safran, 2014, pp. 217-219.

NEUGEBAUER Otto, 1931_2, Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik Astronomie und Physik* 1 (1931) 413-451; p. 415.

PEET Eric, 1923_1, *The Rhind Mathematical Papyrus British Museum 10057 and 10058*, introduction, transcription, translation and commentary, Londres, The University Press of Liverpool, Hodder and Stougthon, 1923 ; réimp. Nendeln (Liechtenstein), Kraus Reprint, 1970.

PEET Eric, 1931_2, Mathematischer Papyrus des Staadtlichen Museums der Schönen Künste in Moskau von W.W. Struve, *The Journal of Egyptian Archaeology* 17 (1931) 154-160, pp. 154-155, 160

REINEKE Walter-Friedrich, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* Thèse, 2 vol., Berlin, Humbolt-Universität,1964, pp. 150-151.

SPALINGER Antony, 1990, The Rhind Mathematical Papyrus as a Historical source, *Studien zur Altägyptischen Kultur* 17 (1990) 295-337.

STRUVE Wasili, 1930 (1977), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, herausgegeben und kommentiert unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von B. A. Turaeff, Berlin, Spinger, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, 1930, rééd. , Würzburg, Jal-reprint, 1973, pp. 133-134.

TSINSERLING D. P. , 1925, Geometriya u drevnikh egitpyan (Géométrie dans l'ancienne Égypte), *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'Union des Républiques Soviétiques Socialistes*, Léningrad, 19 (1925) 541-568, pp. 559, 565.

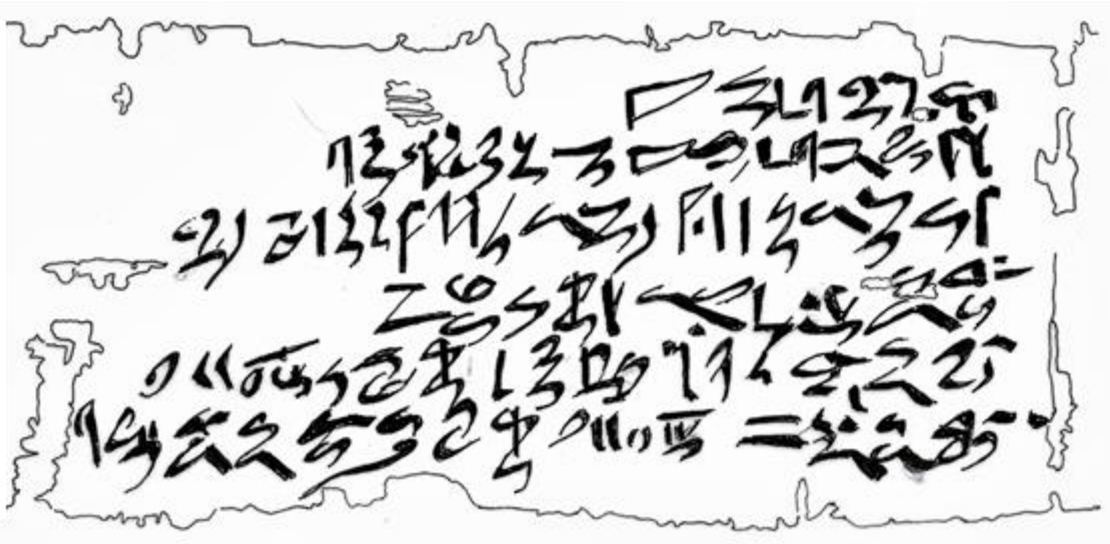
TURAEV Boris, 1917, The volume of the truncated pyramid in Egyptian mathematics, *Ancient Egypt*, Londres, 1917, pp. 100-102.

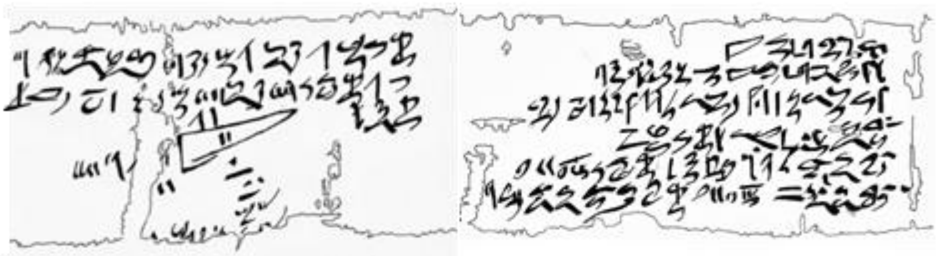
VOGEL Kurt, 1930_3, Der Moskauer mathematische Papyrus, *Archiv für Geschichte der Mathematik der Naturwissenschaften und der Technik* 13 (1930) 446-463 ; pp.454-455, 462.

VOGEL Kurt, 1958, *Vorgriechische Mathematik*, 2 t., Hannovre, Hermann Schroedel Verlag ; Paderborn, Verlag Ferdinand Schöningh, 1958; t. 1, p. 65.

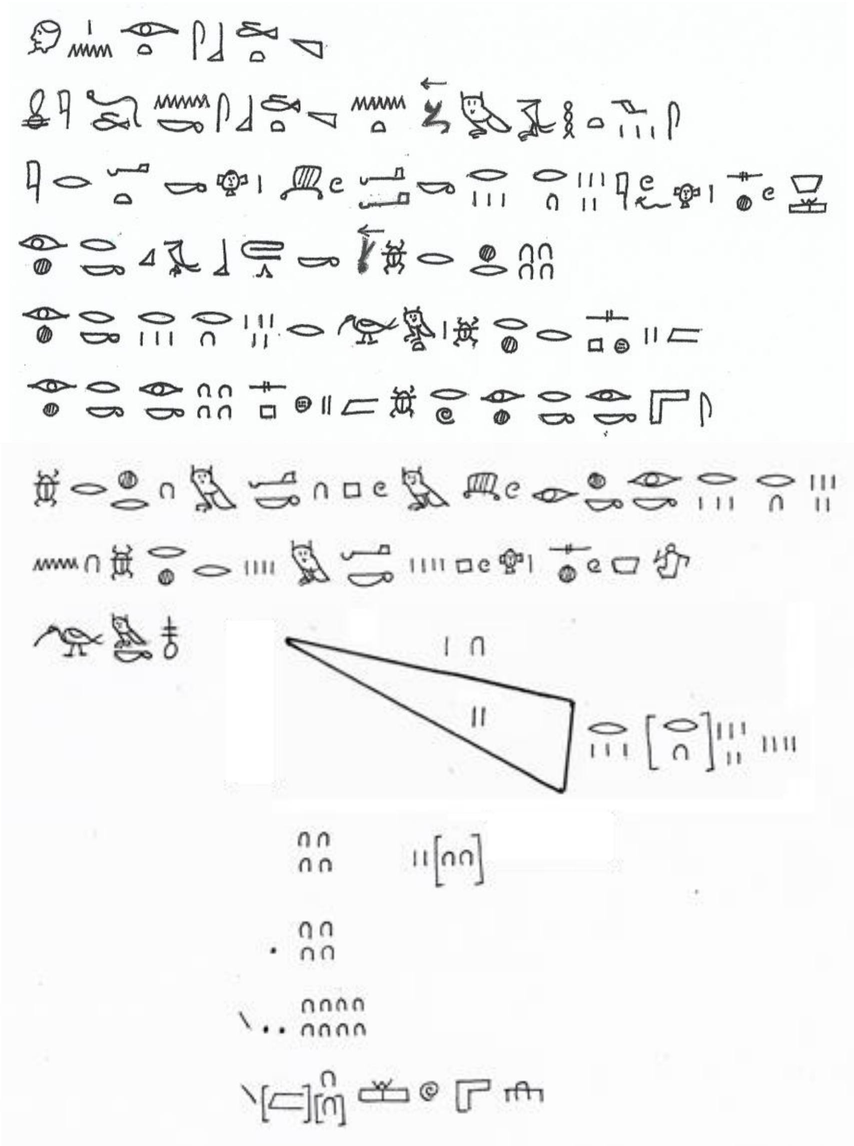
LE PROBLÈME M17 DU *PAPYRUS DE MOSCOU*

TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



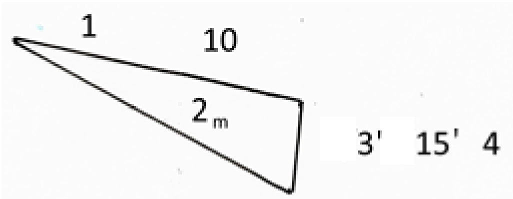


TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSCRIPTION SAVANTE

L1 tp n jr.t sbd.t
L2 mj Dd(.w) n.k sbd.t n.t 2000 m AH.t.s
L3 jr dj.t.k Hr Aw djdj.k 3‘ 15‘ jw.f Hr (w)zxw
L4 jr.xr.k qAb.k 2000 xpr.xr 40
L5 jr.xr.k jr.k 3‘ 15‘ r gm.t 1 xpr.xr zp 2 2‘
L6 jr.xr.k jr.k 40 zp 2 2‘ xpr.xr 100 jr.xr.k jr.k qnb.t.s
L7 xpr.xr 10 mk 10 pw m Aw jr.xr.k jr.k 3’ 15’
L8 n 10 xpr.xr 4 mk 4 pw Hr (w)zxw
L9 gm.k nfr



		40		2 ?
	1	40		
\	2	80		
\	[2‘]	20		
	dmd	100	qnb.t	10

TRANSCRIPTION VOCALISÉE

$\mathbf{L_1}$ tèp èn irèt sébédèt

$\mathbf{L_2}$ mi djéd(.ou) én.èk sébédèt nèt 2000 èm ahét.ès

$\mathbf{L_3}$ ir dit.èk hèr aou didi.èk 3’ 15’ iou.èf hèr (ou)zékhou

$\mathbf{L_4}$ ir.khér.èk qab.èk 2000 khépér.khèr 40

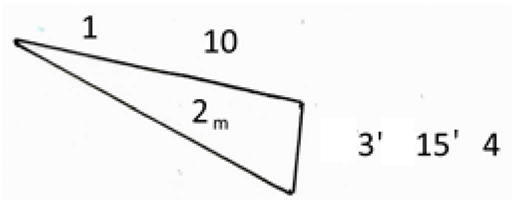
$\mathbf{L_5}$ ir.khér.èk ir.èk 3’ 15’ èr gémèt 1 khépér.khèr zèp 2 2’

$\mathbf{L_6}$ ir.khér.èk ir.èk 40 zèp 2 2’ khépér.khèr 100 ir.khér.èk ir.èk qénébét.ès

$\mathbf{L_7}$ khépér.khèr 10 mèk 10 pou èm aou ir.khér.èk ir.èk 3’ 15’

$\mathbf{L_8}$ èn 10 khépér.khèr 4 mèk 4 pou hèr (ou)zékhou

$\mathbf{L_9}$ gém.èk néfèr



		40	2 ?	
	1	40		
\	2	80		
\	[2’]	20		
	démèd	100	qénébèt	10

TRANSCRIPTION VOCALISÉE INDEXÉE

L1 tèp èn irèt sébédèt[1]

L2 mi djéd én.èk sébédèt nèt 2000[2] èm ahét.ès[3]

L3 ir dit.èk[4] hèr aou didi.èk[5] 3’ 15’ iou.èf hèr (ou)zékhou

L4 ir.khér.èk qab.èk 2000[2] khépér.khèr 40

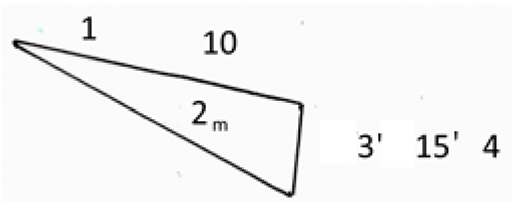
L5 ir.khér.èk ir.èk 3’ 15’ èr gémèt 1 khépér.khèr zèp 2 2’

L6 ir.khér.èk ir.èk 40 zèp 2 2’ khépér.khèr 100 ir.khér.èk ir.èk qénébét.ès

L7 khépér.khèr 10 mèk 10 pou èm aou ir[6].khér.èk ir.èk 3’ 15’

L8 èn 10 khépér.khèr 4 mèk 4 pou hèr (ou)zékhou[7]

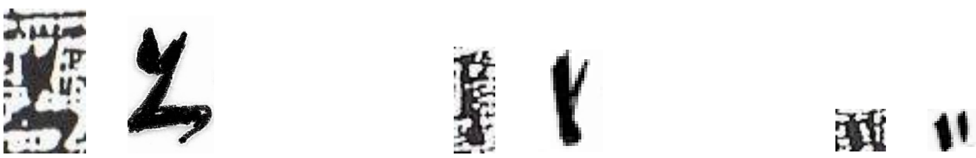
L9 gém.èk néfèr



		40		2 ?[8]
	1	40		
\	2	80		
\	[2’]	20		
	démèd	100	qénébèt	10

1 — Pour désigner un triangle, en M7, le scribe emploie le terme *sépédèt* (spd.t) alors qu’en M17, il utilise le mot *sébédèt* (sbd.t), témoignage du changement de la lettre p en la lettre b. Dans les deux cas, le déterminatif est un triangle oblique alors que, dans le *Papyrus Rhind*, Âhmès trace un triangle reposant sur sa « largeur » horizontale.

2 — La transcription et la traduction du signe tracé par le scribe ne font pas l’unanimité. Il désigne la mesure de la superficie d’un triangle pour laquelle le scribe écrit, dans ce problème, trois marques différentes :



Seule la dernière est sans ambiguïté puisque le scribe a tracé deux traits verticaux, c’est-à-dire, le chiffre 2. Elle est inscrite à l’intérieur de la figure, plus précisément, du triangle. C’est la transcription retenue par tous les commentateurs. Seul, dans ses notes, Wasili Struve pense qu'il s'agit de la graphie usuelle pour 20 *khét carrés*[120]. Ce nombre 20 correspond effectivement aux résultats donnés par le scribe pour les dimensions du triangle, à savoir, 10 et 4 ce qui donne une superficie de 20 unités carrées. Or, le scribe ne précise pas les unités de mesure employées. Nous sommes donc amenés à relier les deux nombres 2 et 20 comme correspondant à des unités différentes. Sachant qu'un *mille de terre* vaut 10 *sétchat*, soit encore, 10 *khèt carrés*, nous pouvons penser que le chiffre 2 correspond à 2 *milles de terre*. C'est ce que souligne Marianne Michel dans son commentaire en écrivant, à l'intérieur du triangle « *Aire = 2* kha-ta [121]», *kha-ta* étant le terme égyptien désignant le *mille de terre*.

Ces deux interprétations se retrouvent dans les diverses transcriptions et, par suite, traductions des deux autres marques. Ainsi, Battiscombe Gunn et Eric Peet considèrent que le scribe a écrit tout d'abord le chiffre 2000 tout en ajoutant que celui-ci « *is abnormally formed, but the reading is not in doubt* [122]». Ils sont suivis par Sylvia Couchoud[123] et M. Michel[124]. En revanche, les autres commentateurs adoptent la voie tracée par Struve[125] qui revient à considérer une écriture spéciale pour signifier 20 *khèt carré*, soit 20 *sétchat*. Toutefois, en note, Annette Imhausen[126] renvoie aux deux interprétations tout en soulignant que les marques rappellent le chiffre 2000. En effet, nous savons que le scribe est peu soigneux et que dès lors, nous pouvons considérer que la première occurrence se rapproche du signe hiératique pour 2000 constitué par deux barres verticales soulignées par un « z ». Ici les deux barres sont jointes comme cela arrive dans l'écriture hiératique du chiffre 5000. On peut hésiter pour la deuxième occurrence.

3 — Si nous faisons abstraction du signe numérique écrit par le scribe pour indiquer la mesure de la superficie du rectangle, le scribe emploie aussi deux formulations différentes en M7 et M17 respectivement *nèt ahèt 20* (n.t AH.t 20) et *nèt 20 èm ahèt.ès* (n.t 20 m AH.t.s) auxquelles correspondent nos expressions classiques : un triangle « d'une superficie de 20 » ou « de 20 pour sa superficie ».

4 — Gunn et Peet signalent que nous avons ici un « *interesting example of the Prospective Relative Form* [127]».

5 — Le *.én* (.n) implique la forme *sédjém.én.èf* (sDm.n.f) qui est celle du passé mais aussi celle du récit par excellence, Ici, ce n'est pas le cas. Il est en trop.

6 — Gunn et Peet[128] notent une incorrection : le signe de la bouche est manquant.

7 — Le dernier signe écrit à la fin de la huitième ligne est celui de l'homme assis (A2 dans la classification de Gardiner). Tous les commentateurs le retiennent dans leur transcription hiéroglyphique mais la plupart ne lui accordent aucune importance, tant lors de leur

[120] Struve, 1930, *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, p. 132, „*Die übliche graphische Bezeichnung von 20 Quadrat- xt mit zwei vertikalen Strichen*".
[121] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 289.
[122] Gunn, Peet, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, p. 174.
[123] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, pp. 49-51, « *la surface du triangle est exprimée en coudées carrées, mais la suite du calcul est exprimée en tA (100 coudées au carré), de même que les résultats* ».
[124] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p.287, « *2000 (coudées de terre)* ».
[125] Struve, 1930, *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, pp. 129-130, „*eine eigenartige Schreibung des Zeichens für 20 Quadrat- xt*".
[126] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, "*Anstelle von 20 wurde jeweils ein Zeichen geschrieben, welches an 2000 erinnert*".
[127] Gunn, Peet, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, p. 174.
[128] Gunn, Peet, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, p. 175.

transcription savante que dans leur traduction. Seule S. Couchoud[129] considère cette marque comme signifiant un suffixe, ce qui semble alourdir inutilement le propos. Nous pourrions aussi supposer l'indication d'un vocatif. Mais il serait lié à la ligne suivante que l'on retrouve dans de nombreux exemples du *Papyrus de Moscou* avec l'expression *gém.èk néfèr* (gm.k nfr) pour souligner que le scribe a bien trouvé la solution du problème qu'il devait résoudre. Autrement dit, la dissociation du vocatif ne s'impose pas. Dès lors, comme les autres commentateurs, nous devons suivre l'interprétation donnée par Gunn et Peet[130]. Ils parlent d'un déterminatif lié à une dimension et l'associent, fort justement, à son occurrence dans le M14 à la ligne 2.

8 — La position et la transcription des marques numérales que nous avons écrites sur la même ligne varient selon les auteurs. Gunn et Peet y voient le chiffre 40 disposé sous le triangle signifiant les 40 *sétchat* de la superficie du rectangle associé et le chiffre 4 dont deux barres seraient dans la lacune positionnée en bout du triangle dont la mesure d'une des dimensions est 4. Struve lit des chiffres 40, 2 et 20 (en lacune) sur la même ligne. Il traduit 40 20 (*khét* carré) [20]. C'est l'option retenue par A. Imhausen. Walter-Friedrich Reineke[131] change l'ordre et propose 2 20 40. Enfin, M. Michel innove en essayant de donner une explication : « *le calcul de l'aire est, lui, exprimé en dessous du schéma du triangle cela donne*

$$A_{[triangle]} = \frac{l \times L}{2} = \frac{4 \times 10}{2} = \frac{40}{2} = 20$$ [132]».

De l'art de transformer la division théorique de 40 par 2 en la multiplication de 2 par 20 dont le résultat est 40 ! Pour notre part, nous devons avouer notre incompétence pour proposer une explication sauf à supposer une erreur du scribe qui aurait voulu présenter la transformation des 2 *milles de terre* en 20 *sétchat* et leur *doublement* pour parvenir aux 40 *sétchat*, superficie du rectangle circonscrit. Il n'est pas assuré que le scribe ait compris toute la subtilité de la solution. Nous nous sommes donc bornés à situer les deux marques des chiffres 40 et 2, suivies d'un point d'interrogation, sur une même ligne.

---

129 Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 49.
130 Gunn, Peet, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, p. 178.
131 Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter*,.
132 Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 288.

TRADUCTION

L_1 Exemple d’une manière de faire un triangle (rectangle).

L_2 S’il t’est dit : « un triangle (rectangle) de 2000 pour sa superficie.

L_3 Quant à ce que tu donnes sur la « longueur », tu dois (en) donner 3’ 15’ qui est sur la « largeur ».

L_4 Tu feras ton *doublement* de 2000. Il adviendra 40.

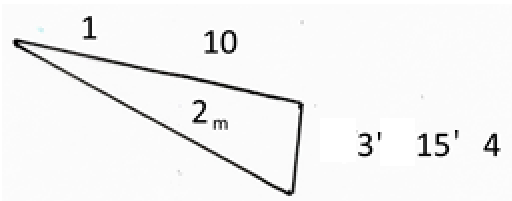
L_5 Tu feras ta manière de calculer, 3’ 15’ jusqu’à trouver 1. Il adviendra 2 2’ fois.

L_6 Tu feras ta manière de calculer, 40, 2 2’ fois. Il adviendra 100. Tu feras ta manière de calculer son « coin ».

L_7 Il adviendra 10. Vois ! C’est 10 en « longueur ». Tu feras ta manière de calculer, 3’ 15’

L_8 de 10. Il adviendra 4. Vois ! C’est 4 pour[1] la « largeur ».

L_9 Tu as bien trouvé.



		40		2 ?	
	1	40			
\	2	80			\
\	[2’]	20			\
	Total	100	« Coin »	10	

1 — En fin de solution, pour indiquer la valeur des dimensions du triangle (rectangle), le scribe varie les expressions. Alors que pour la « longueur » il avait employé *N pou èm* (N pw m) que nous rendons par « c’est N en », pour la « largeur », il utilise *N pou hèr* (N pw Hr) que nous traduisons « c’est N pour ». Notons que S. Couchoud ajoute l’adjectif possessif *ma* qui n’a pas de raison d’être.

ADAPTATION

Exemple d'une manière de procéder pour un triangle (rectangle).

S'il t'est dit : « un triangle (rectangle) de 2000 (*coudées de terre*) pour sa superficie.

De ce que tu mets pour la « longueur », tu dois en mettre 1/3 1/15 pour ce qui est la « largeur » ».

Tu doubleras 2000 (*coudées de terre*). Il en résultera 40 (*sétchat*).

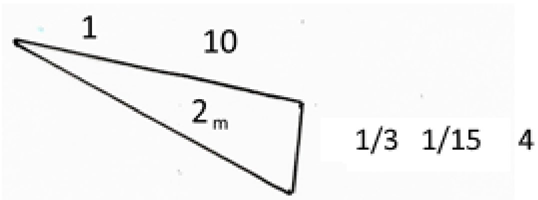
Tu diviseras 1 par 1/3 1/15. Il en résultera 2 1/2.

Tu multiplieras 40 par 2 1/2. Il en résultera 100.

Tu extrairas sa racine carrée. Il en résultera 10. Vois ! C'est 10 en « longueur ».

Tu multiplieras 10 par 1/3 1/15. Il en résultera 4. Vois ! C'est 4, pour la « largeur » !

Tu as bien trouvé.



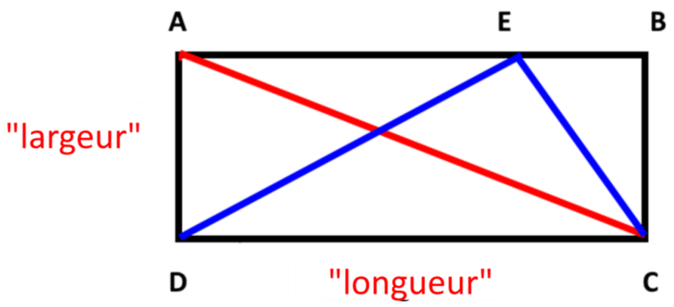
		40	2 ?		
	1	40			
\	2	80			\
\	[1/2]	20			\
	Total	100	Racine carrée	10	

COMMENTAIRE

L'énoncé

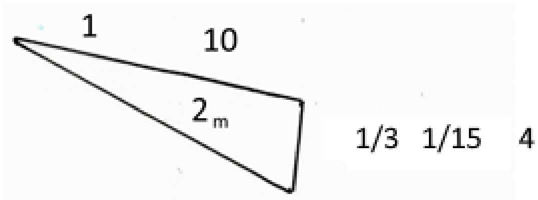
Exemple d'une manière de procéder pour un triangle (rectangle).
S'il t'est dit : « un triangle (rectangle) de 2000 (*coudées de terre*) pour sa superficie.
De ce que tu mets à la « longueur », tu dois mettre 1/3 1/15 à la « largeur ».

Alors que le problème M6 du *Papyrus de Moscou* et une partie du *Fragment UC 32162 d'El-Lahoun* ont trait à un rectangle, les exercices M7 et M17 sont relatifs à un triangle qui, sans doute, est rectangle. En effet, d'une part, le scribe emploie les termes *aou* (Aw) et *(ou)zékhou* ((w)zxw) qui désignent, respectivement, la *longueur* et la *largeur* d'un rectangle : nous les traduisons par ces mots mis entre guillemets. D'autre part, la considération de ce que nous nommons le *quotient-de-proportion*, ne peut caractériser la forme d'un triangle quelconque. En termes d'aujourd'hui, les données d'un des quotients entre les mesures de la base et de la hauteur ne suffisent pas pour en déterminer la forme : dans la figure ci-dessous, les triangles **ACD** et **ECD** ont le même *quotient-de-proportion*, considéré, comme en M17, par exemple, sous la forme du rapport de la mesure de la hauteur AD à celle de la base CD et ils n'ont pas la même forme. Autrement dit, dans un triangle rectangle la « longueur » désigne le plus grand côté de l'angle droit tandis que la « largeur » est le plus petit côté de l'angle droit.



Géométriquement, le scribe commence par considérer, implicitement, le double de la superficie du triangle rectangle sous la forme de celle du rectangle circonscrit sur ses deux côtés de l'angle droit (dans la figure ci-dessus, le rectangle ABCD a une superficie double de celle du triangle rectangle ACD, mais aussi double de celle du triangle « quelconque » ECD) de manière à lui appliquer la procédure qu'il a suivie en M6. Déterminer les dimensions principales du triangle rectangle ACD revient à calculer celles du rectangle ABCD.

Il n'en demeure pas moins que l'énoncé du problème M17 donne lieu à deux particularités. La première concerne les précisions métrologiques indiquées par le scribe. Nous en avons fait l'écho dans la note 2 de notre transcription vocalisée. En fait, par trois fois le scribe écrit la mesure de la superficie du triangle mais avec des marques toutes distinctes. Nous pouvons penser qu'il veut ainsi signifier qu'il utilise des unités de mesure différentes. Dans l'énoncé, il s'agit de la *coudée de terre*, c'est-à-dire, la superficie d'un rectangle dont les dimensions sont 1 *khèt*, soit 100 *coudées* pour la longueur et 1 *coudée* pour la largeur. La superficie du triangle est alors, implicitement, égale à 2000 *coudées de terre*. Il peut en être de même au début de la solution lorsqu'il demande de doubler cette mesure. Mais il donne 40 comme résultat ce qui laisse à penser que c'est la *sétchat* qui est alors implicitement considérée, unité de mesure de superficie qui vaut 100 *coudées de terre*, soit encore 1 *khèt carré*. La superficie est alors, implicitement, de 20 *sétchat* et son double de 40 *sétchat* :



Enfin, à l'intérieur de la figure, le scribe trace deux traits, marque du chiffre 2 pouvant ainsi signifier 2 *milles de terre* que nous rendons par l'écriture indexée 2_m étant entendu que, comme son nom l'indique, un *mille de terre* vaut 1000 *coudées de terre*. De cette interprétation, nous pouvons en déduire que l'unité de mesure de longueur considérée est le *khét* qui vaut 100 *coudées*, soit, 52 mètres environ. Raisonnant donc en *khèt* et *khèt carrés* ou *sétchat,* nous avons les données et transformations suivantes :

mesure T_c de la superficie du triangle (rectangle), en *coudées de terre* : $T_c = 2000$,

mesure T_s de la superficie du triangle (rectangle), en *sétchat* : $T_s = 20$,

Selon que les commentateurs désirent ou non privilégier les marques écrites par le scribe, ils optent pour les nombres 2000 ou 20, indiquant parfois l'unité de superficie considérée.

Enfin, une deuxième particularité est relative à la formulation du *quotient-de-proportion*. Dans les divers exercices concernés, les scribes le présentent différemment. Ici, l'accent est mis sur l'invariance par rapport à l'unité de mesure employée. Ce qui est fondamental, c'est la nécessité de prendre la même unité de mesure pour exprimer les dimensions du triangle (rectangle). Autrement dit, point de différence comme nous pouvons le constater lorsque l'on considère la *coudée de terre* qui représente la superficie d'un rectangle dont les côtés ont pour longueurs respectives, 1 *khèt* et 1 *coudée* soit deux unités différentes de mesure de longueur. Par ailleurs, en écrivant, dans la figure, les nombres 1 et 1/3 1/15, respectivement, en regard de deux côtés et les mesures associées des dimensions du triangle (rectangle), le scribe désire insister sur ce point : si la mesure de la « longueur » est 1, la mesure de la « largeur » est 1/3 1/15. Autant dire que nous ne partageons pas l'opinion formulée par M. Michel[133] lorsqu'elle croît voir dans cette disposition celle de la multiplication de 1/3 1/15 par 10. Ajoutons que, comme nous le verrons ultérieurement, le scribe demande de prendre le 1/3 1/15 de 10, ce qui revient à mettre en œuvre une opération différente, à savoir, celle de la multiplication de 10 par 1/3 1/15. Nous ne devons pas oublier que, dans la pratique, pour un scribe égyptien, l'ordre des facteurs d'une multiplication est important. En termes modernes, en pratique, pour lui, cette opération n'est pas commutative même si les scribes savent que les résultats qui en résultent sont égaux. C'est d'ailleurs un élément important de l'Art égyptien du calcul. Ainsi, le *quotient-de-proportion* est égal à 1/3 1/15 et pour tout triangle rectangle ayant ce *quotient-de-proportion*, si l'on note l et L les mesures respectives de la « largeur » et de la « longueur » exprimées avec une même mesure de longueur, nous avons

$$l = L \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right).$$

[133] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, p. 288.

Autrement dit, le scribe applique cette forme universelle au triangle (rectangle) « unitaire » dont la mesure de la « longueur » est 1 puis, bien sûr, au triangle (rectangle) cherché, lorsque la mesure de sa « longueur » est connue.

Par ailleurs, alors que le problème M6 est relatif à un rectangle « pythagoricien », dans les problèmes M7 et M17, les *quotients-de-proportion* ont aussi une expression particulière : 2 1/2 et 1/3 1/15. En effet, aujourd'hui, nous pouvons écrire :

$$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=5:2 \quad\quad et \quad\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}=2:5=2\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times 2\,.$$

Ils sont inverses l'un de l'autre et 1/3 1/15 n'est autre que l'expression égyptienne usuelle du double de 1/5, comme nous la lisons lors des *expressions de 2 à partir d'un entier* par lesquelles débute le *Papyrus Rhind* ou dans le *Fragment UC 32159 d'El Lahoun*.

Le calcul du double de la mesure de la superficie

Tu doubleras 2000 (*coudées de terre*). Il en résultera 40 (*sétchat*).

Sans doute, comme lors de l'exercice M7, afin de se ramener au rectangle circonscrit aux deux côtés de l'angle droit du triangle (rectangle), le scribe invite à doubler la mesure de la superficie du triangle (rectangle). Mais, ici, il précise le nombre qui doit être doublé, à savoir, 2000, et il donne comme résultat le nombre 40. Autrement dit, dans une seule expression, il a donné une instruction qui revient à effectuer deux opérations, le *doublement* et la transformation métrologique correspondant au changement d'unité de mesure de superficie, à savoir, de la *coudée de terre* à la *sétchat*. Du point de vue de l'ordre de ces deux opérations, il n'y a pas de différence sensible. Commencer par diviser 2000 (*coudées de terre*) par 100 pour obtenir 20 (*sétchat*) puis doubler ce nombre pour parvenir au résultat 40 (*sétchat*) est aussi simple que doubler 2000 (*coudées de terre*) qui donnent 4000 (*coudées de terre*) et ensuite diviser par 100 pour parvenir aux 40 (*sétchat*). M. Michel opte pour le *doublement* suivi de la conversion. Nous pensons que nous devons préférer l'ordre inverse, c'est-à-dire, qu'il vaut mieux effectuer la conversion avant le *doublement*. En effet, en procédant de la sorte, on met l'accent sur la transformation essentielle pour résoudre le problème posé. Il faut opérer avec des unités de mesure de superficie qui soient des carrés d'unités de mesure de longueur. Par conséquent, on doit transformer les données exprimées en *coudées de terre* en *khét carr*és, c'est-à-dire, en *sétchat* :

$$2000\ coudées\ de\ terre = 20\ sétchat\,.$$

Autrement dit, le scribe a obtenu la mesure R_s, en *khét carrés* soit encore, en *sétchat*, de la superficie du rectangle circonscrit :

$$20\times 2 = 40 = T_s\times 2 = \left(\frac{1}{2}Ll\right)\times 2 = Ll = R_s\,.$$

Une opération *a priori* insolite : le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*

Tu diviseras 1 par 1/3 1/15. Il en résultera 2 1/2.

Le scribe nous propose d'effectuer une opération *a priori* insolite. Mais, une fois de plus, il varie les formulations des instructions et des résultats qui en découlent. Ici, nous pouvons traduire comme suit : *Tu feras ta manière de calculer, 3' 15' jusqu'à trouver 1*. En termes opératoires d'aujourd'hui, ceci revient à dire *Tu diviseras 1 par 1/3 1/15*. L'intention est claire : sachant que si l'on attribue la valeur 1 à la « longueur », 1/3 1/15 sera celle de la « largeur », on doit ici en déduire le « rapport » inverse, à savoir, si l'on attribue la valeur 1 à la « largeur », quelle sera la valeur de la « longueur ». Il faut donc diviser 1 par 1/3 1/15. Disposant du résultat, cette opération, que le scribe ne présente pas, peut s'effectuer comme suit :

1	1/3 1/15	(initialisation)
\ 2	2/3 1/10 1/30	(*doublement* et R2/15)
\ 1/2	1/6 1/30	(*dédoublement*)
Total	1	

Pour la totalisation, en tenant compte de l'égalité

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6},$$

qui semble être bien connue des scribes égyptiens, nous pouvons écrire successivement

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{30}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1\,.$$

Bien entendu, pour effectuer le total, le scribe peut toujours utiliser la méthode que nous appelons des *auxiliaires numériques* sorte de palliatif à nos réductions au même dénominateur. Ici, ceci revient à raisonner en trentièmes :

2/3	1/10	1/30	1/6	1/30	Total	1
20	3	1	5	1	Total	30

ce qui revient, aujourd'hui, à écrire :

$$30\times\frac{2}{3}=20\quad,\quad 30\times\frac{1}{10}=30:10=3\quad,\quad 30\times\frac{1}{30}=30:30=1\quad,\quad 30\times\frac{1}{6}=30:6=5\,,$$

ou

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{30}\times 20\quad,\quad \frac{1}{10}=\frac{1}{30}\times 3\quad,\quad \frac{1}{6}=\frac{1}{30}\times 5\quad,\quad \frac{1}{30}=\frac{1}{30}\times 1\,.$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{30}(20 + 3 + 1 + 5 + 1) = \frac{1}{30} \times 30 = 1\,.$$

Quoiqu'il en soit, nous avons :

$$1 : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = 2 + \frac{1}{2} = 1 : Q = \bar{Q}\,.$$

En fait, il se peut que le scribe n'ait pas effectué cette division. Le problème a été fabriqué de telle sorte qu'il peut s'appuyer sur certaines connaissances. En effet, lors des *expressions de 2 à partir d'un entier* par lesquelles débute le *Papyrus Rhind* où que nous lisons dans le *Fragment UC 32159 d'El Lahoun*, nous pouvons en déduire que la division de 2 par 5 donne 1/3 1/15 comme résultat qui est aussi l'expression égyptienne du double du quantième 1/5. Par conséquent, l'inverse de 1/3 1/15 est égal à la moitié de 5 soit encore au résultat de la division de 5 par 2, c'est-à-dire, 2 1/2 :

$$\frac{1}{5} \times 2 = 2 : 5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \quad , \quad 1 : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = 5 : 2 = 2 + \frac{1}{2}.$$

Il n'en demeure pas moins que le *quotient-de-proportion* étant ici le quotient de la mesure de la « largeur » par celle de la « longueur », son inverse n'est autre que le quotient de la mesure de la « longueur » par celle de la « largeur », ce qui, *a priori*, ne change rien au fondement d'une procédure de résolution du problème et rend insolite, à cet instant, cette manière d'opérer :

$$\bar{Q} = 1 : Q = \frac{1}{Q} = 1 : (l : L) = 1 : \frac{l}{L} = \frac{L}{l} = L : l\,.$$

Le calcul du carré de la mesure de la « longueur »

Tu multiplieras 40 par 2 1/2. Il en résultera 100.

Le scribe demande de multiplier la mesure, 40, de la superficie du rectangle circonscrit par le nombre qu'il vient de trouver, à savoir, 2 1/2. Il obtient ainsi, sans qu'il l'affirme, le carré de la mesure de la « longueur ». En effet, nous pouvons écrire :

$$40 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 100 = R_s \times \bar{Q} = (L \times l) \times \frac{L}{l} = L^2\,.$$

Par conséquent, le carré de la mesure, sous-entendu, en *khèt*, de la longueur du rectangle circonscrit, c'est-à-dire, de la « longueur » du triangle (rectangle), est égal à 100. Cette multiplication peut s'effectuer immédiatement comme suit :

1	40	(initialisation)
\ 2	80	(*doublement*)
\ 1/2	20	(*dédoublement*)
Total	100	$(80 + 20 = 100)$

Le calcul de la mesure de la « longueur » du triangle (rectangle)

Tu extrairas sa racine carrée. Il en résultera 10. Vois ! C'est 10 en « longueur ».

Ayant obtenu le carré de la mesure, en *khèt*, de la longueur du rectangle circonscrit, il est naturel qu'en en prenant la racine carrée, le scribe détermine ainsi la mesure de la « longueur » du triangle (rectangle) :

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{L^2} = L \,.$$

Le calcul de la mesure de la « largeur » du triangle (rectangle)

Tu multiplieras 10 par 1/3 1/15. Il en résultera 4. Vois ! C'est 4, pour la « largeur » !

Le scribe peut en déduire la mesure de la « largeur » puisque le « rapport » Q de la mesure de la « largeur » à celle de la « longueur » est connu :

$$10 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = 4 = L \times Q = L \times (l : L) = l \,.$$

Cette multiplication pourrait se présenter comme suit :

	1	10	(initialisation)
	2/3	6 2/3	(*table de deux-tiers*)
\	1/3	3 1/3	(*dédoublement*)
	1/10	1	(division par dix)
	2/3 de 1/10	2/3	(*table de deux-tiers*)
	1/3 de 1/10	1/3	(*dédoublement*)
	1/30	1/3	(simplification)
\	1/15	2/3	(*doublement*)
	Total	4	$\left(3 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3 + 1 = 4\right)$

Bien entendu, pour obtenir le résultat de la multiplication de 10 par 1/15, le scribe pourrait aussi raisonner de manière plus générale en divisant 10 par 15 ce qui permet d'avoir immédiatement le résultat en utilisant une *table de deux tiers* :

$$15 \times \frac{2}{3} = 10 \quad \text{donc} \quad 10 \times \frac{1}{15} = 10 : 15 = \frac{2}{3}.$$

D’autres procédures

Nous pouvons remarquer que l’expression du *quantième-de-proportion* est « complexe » car elle est la somme de deux quantièmes dont l’un, est en quelque sorte, quelconque, tandis que celle de son inverse est plus « simple », à savoir, la somme d’un nombre entier et de 1/2. Il en résulte que, de manière générale, la multiplication ou la division d'un nombre entier par l’inverse du *quotient-de-proportion* est plus facile à effectuer que les mêmes opérations avec ce *nombre-de-fois*. Dès lors, comme pour le problème M7, nous pouvons penser trouver des procédures plus simples que celle suivie par le scribe pour résoudre le problème M17. Il suffit de considérer celles qui n’utilisent que l’inverse du *quotient-de-proportion*. Pour les définir, de manière générale, nous nous situons dans une perspective algébrique consistant à déterminer, dans la structure numérique égyptienne, la solution du système

$$xy = P \quad \text{et} \quad y = x \times Q\ .$$

Dans le M17, nous avons

$$P = 40 \quad , \quad Q = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \quad , \quad \bar{Q} = \frac{1}{Q} = 2 + \frac{1}{2}.$$

Aujourd’hui, nous obtenons immédiatement les diverses expressions suivantes de la solution :

$$x = \sqrt{\frac{P}{Q}} = \sqrt{P \times \frac{1}{Q}} = \sqrt{\frac{1}{Q} \times P} = \sqrt{P : Q} = P : y = \frac{y}{Q} = y : Q = y \times (1 : Q) = (1 : Q) \times y\,,$$

$$y = \sqrt{Q \times P} = \sqrt{P \times Q} = Q \times x = x \times Q\ .$$

Nous pouvons considérer que la solution proposée par le scribe en M17 revient à écrire

$$x = \sqrt{P \times \bar{Q}} \quad , \quad y = x \times Q\,,$$

autrement dit, à obtenir d’abord x à partir du calcul de l’inverse du *quotient-de-proportion* puis l’autre dimension y. Certes la première démarche répond à notre recherche mais il n’en est plus de même pour la deuxième. Pour calculer la mesure de la « largeur » nous devons considérer un passage aux inverses :

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x \times Q} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{Q} = \frac{1}{x} \times \bar{Q}\ .$$

Dans le cas du M17, il nous reste donc à multiplier l’inverse de la « longueur », soit, 1/10, par 2 1/2, opération qui peut être effectué comme suit :

	1	1/10	(initialisation)
\	2	1/5	(*doublement*)
\	1/2	1/20	(*dédoublement*)
Total		1/4	

Pour la totalisation, nous pouvons utiliser la relation bien connue :

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}.$$

D'où, par inversion, la mesure de la « largeur », 4. Certes, cette manière de procéder est théoriquement possible, mais nous pouvons penser qu'elle est étrangère aux pratiques habituelles des scribes égyptiens.

Aussi, comme pour le problème M6 du *Papyrus de Moscou* ou le *Fragment UC 32 161-1 d'El-Lahoun*, nous pouvons envisager d'autres procédures plus proches des techniques égyptiennes. Nous adoptons un cadre semblable à celui que nous avons employé pour le problème M7. Ici, le *quotient-de-proportion* est le double de l'inverse d'un nombre p premier impair

$$Q=\frac{1}{p}\times 2\,.$$

Si nous supposons que la solution et le produit sont des nombres entiers, alors, on peut démontrer qu'il existe un nombre entier *t* tel que

$$xy=P=2pt^2 \quad , \quad Q=\frac{2}{p} \quad , \quad \bar{Q}=\frac{p}{2} \quad , \quad x=tp \quad , \quad y=2t\,.$$

Muni de ces réflexions théoriques nous pouvons nous interroger sur la pertinence de la procédure employée par le scribe et en particulier de la comparer au calcul direct par division, à savoir :

$$P:Q=2pt^2:\frac{2}{p}=p^2t^2\,.$$

Dans le cas du M17, nous devons effectuer la division de 40 par 1/3 1/15 qui pourrait se présenter comme suit :

	1	1/3 1/15	(initialisation)
	2	2/3 1/10 1/30	(*doublement* et R2/15)
\	20	8	$(6+\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}=8)$
	40	16	(*doublement*)
\	80	32	(*doublement*)
Total	100	40	$(8+32=40)$

Il est évident que, compte tenu du résultat, nous avons utilisé la multiplication par 10 qui, ici, s'introduit naturellement à partir des quantièmes 1/10 et 1/30. Mais nous pourrions aussi utiliser le fait que 1/3 1/15 est l'expression du double de 1/5 donc, qu'en le multipliant par 5, on obtient 2 pour résultat

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{1}{5}\times 2 \qquad , \qquad \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\times 5=\left(\frac{1}{5}\times 2\right)\times 5=2\,,$$

et procéder comme suit

	1	1/3 1/15	(initialisation)
	5	2	(*observation*)
	10	4	(*doublement*)
\	100	40	(*multiplication par 10*)

Resituée dans le cadre général où nous nous sommes placés, cette manière d'opérer est tout aussi pratique puisque nous obtenons ainsi comme résultat de cette multiplication partielle le nombre entier 2 et il suffit d'effectuer ensuite des *doublements successifs* pour achever la division. Notons qu'au vu du résultat, à savoir, p^2t^2, cette introduction du nombre p comme premier multiplicateur, peut être, théoriquement, tout à fait naturelle.

Une autre résolution consiste à suivre la voie empruntée par le scribe en M7. Nous avons alors un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$y=\sqrt{P\times Q} \quad et \quad x=y\times \bar{Q}.$$

Nous avons alors

$$P\times Q=2pt^2\times\frac{2}{p}=4t^2 \qquad , \qquad y=2t \qquad , \qquad x=y\times\bar{Q}=2t\times\frac{p}{2}.$$

Cette fois nous avons deux opérations nouvelles. Tout d'abord, la multiplication de P par Q, c'est-à-dire, en M17 celle de 40 par 1/3 1/15 qui peut s'effectuer comme suit :

	1	40	(initialisation)
	2/3	26 2/3	(*table de deux-tiers*)
\	1/3	13 1/3	(*dédoublement*)
	1/10	4	(division par dix)
	2/3 de 1/10	2 2/3	(*table de deux-tiers*)
	1/3 de 1/10	1 1/3	(*dédoublement*)
	1/30	1 1/3	(réduction)
\	1/15	2 2/3	(*doublement*)
	Total	16	$\left(13+\frac{1}{3}+2+\frac{2}{3}=16\right)$

Nous retrouvons la démarche opératoire suivie sans doute par le scribe lorsqu'il a multiplié 10 par 1/3 1/15 pour calculer la mesure de l'autre dimension. En fait, comme nous l'avons indiqué précédemment, nous pourrions utiliser le multiplicateur 1/5 et procéder comme suit :

	1	40	(initialisation)
	2/3	26 2/3	(*table de deux-tiers*)
\	1/3	13 1/3	(*dédoublement*)
	1/5	8	(division par 5)
	2/3 de 1/5	5 1/3	(*table de deux-tiers*)
	1/3 de 1/5	2 2/3	(*dédoublement*)
\	1/15	2 2/3	(réduction)
	Total	16	$\left(13+\frac{1}{3}+2+\frac{2}{3}=16\right)$

Il ne reste plus qu'à multiplier 4, racine carrée de 16 que nous venons de trouver par l'inverse du *quotient-de-proportion* qui a été calculé par le scribe, soit, $2\ 1/2$, opération immédiate qui pourrait se présenter comme suit :

	1	4	(initialisation)
\	2	8	(*doublement*)
\	1/2	2	(*dédoublement*)
Total		10	

En résumé, pour cette procédure, nous devons comparer deux multiplications de nombres entiers par le même nombre, à savoir, le *quotient-de-proportion*. Elles peuvent donner lieu aux mêmes difficultés et aux mêmes considérations, à savoir, ici, celle du multiplicateur 2/3 et celle de la division auxiliaire par 10 sous la forme du multiplicateur 1/10.

Il nous reste à examiner une cinquième procédure. Elle consiste à remplacer la multiplication précédente par la division directe. Nous avons alors un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$y=\sqrt{P\times Q}\quad et\quad x=y:Q.$$

Nous avons alors

$$P\times Q=2pt^2\times\frac{2}{p}=4t^2\quad,\quad y=2t\quad,\quad x=y:\frac{2}{p}=2t:\frac{2}{p}\ .$$

Autrement dit, en M17, nous devons effectuer la division de 4 par 1/3 1/15, opération qui pourrait se présenter comme suit en suivant la technique utilisée pour diviser 40 par 1/3 1/15 :

	1	1/3 1/15	(initialisation)
	5	2	(*observation*)
\	10	4	(*doublement*)

En guise de conclusion

En demandant de calculer le double de la superficie d'un triangle (rectangle), on peut considérer que le cadre principal du problème M17 est le même que celui que nous lisons dans la dernière partie du *Fragment UC 32 162 d'El-Lahoun* et dans les exercices M6 et M7. Toutefois la procédure suivie en M17 est semblable à celle de ces deux premiers problèmes.

En termes *arithmétiques*, nous pouvons considérer qu'il s'agit de trouver les dimensions d'un triangle (rectangle), dont on connaît leur *produit* en tant que double de la mesure de sa superficie et leur *quotient* que nous appelons *quotient-de-proportion* car caractérisant la forme du triangle (rectangle) comme le *séqèd* caractérise la forme des pyramides. Ceci nous conduit à penser que le scribe considère un triangle rectangle car les dimensions traditionnelles, à savoir, base et hauteur, pour calculer la superficie d'un triangle ne suffisent pas pour caractériser la forme d'un triangle quelconque. Pour nous en convaincre, le scribe conserve les termes employés pour désigner la longueur et la largeur d'un rectangle. Dans nos traductions ou adaptations, nous mettons entre guillemets ces dimensions.

En fait, d'un point de vue *numérique,* dans le cas de ces problèmes de dimensions, le *quotient-de-proportion* est sans doute envisagé comme étant le *nombre-de-fois* Q que la mesure d'une dimension est celle de l'autre. En M17, il s'agit du *nombre-de-fois* que la mesure l de la « largeur » est celle de la « longueur » L :

$$l = L \times Q\ ,$$

le calcul de son inverse permettant d'obtenir le *nombre-de-fois* que la mesure de la « longueur » est celle de la « largeur » :

$$L = l \times \bar{Q}\ .$$

Ce sont les deux relations fondamentales entre ces deux dimensions qui conduisent les scribes à ne pas considérer, par exemple, la donnée du produit, sous la forme de la mesure de la superficie du rectangle circonscrit, quand il s'agit de déterminer la mesure de la « largeur » lorsque celle de la « longueur » est connue. Ici, la particularité du *nombre-de-fois* tient au fait que ce nombre est inférieur à 1, ce qui est, sans doute, la source d'une procédure distincte de celle suivie dans le problème M7. On détermine indirectement la mesure de la « longueur » en calculant d'abord l'inverse du *nombre-de-fois*.

Aujourd'hui, nous pouvons dire que ce *nombre-de-fois* est le ressort principal de la procédure employée. Situé dans un cadre *géométrique,* il permet, ici, de relier les données arithmétiques du problème, produit et quotient, sous la forme de la mesure de la superficie du rectangle circonscrit et du *quotient-de-proportion,* comme on peut le voir dans ce que certains historiens des mathématiques appellent l'algèbre géométrique babylonienne ou grecque. Plaçons-nous dans une situation élémentaire, à savoir, celui d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur qui peut être celui de la figure du problème M6. Il est clair que sa superficie est le double de celle du carré dont la mesure du côté est celle de la largeur du rectangle. Plus généralement, et c'est là que la géométrie permet d'étendre les nombres entiers considérés aux nombres rationnels, si la mesure de la longueur est un *nombre-de-fois* Q, entier ou rationnel, celle de la largeur, la mesure de la superficie de ce rectangle est Q fois la mesure de la superficie du carré dont la mesure du côté est celle de la largeur. Autrement dit, de manière encore plus générale, si on multiplie la mesure d'un côté d'un rectangle par un nombre entier ou rationnel, la mesure de la superficie du rectangle obtenu est celle du rectangle initial multipliée par ce nombre. En fait, les scribes utilisent la « relation inverse », à savoir, que multiplier la mesure de la superficie d'un rectangle par un nombre, entier ou rationnel, revient à considérer la mesure de la superficie du rectangle obtenu en multipliant une de ses dimensions par ce nombre. Plus précisément, dans les problèmes de dimensions que nous examinons les scribes prennent comme nombre multiplicateur, le *nombre-de-fois* que la mesure de la longueur est celle de la largeur. Ici en M17, il doit être calculé de sorte que nous pouvons écrire la suite des égalités suivantes :

$$P \times \bar{Q} = (L \times l) \times (L : l) = L \times [l \times (L : l)] = L \times L = L^2 \,.$$

Il ne reste plus qu'à extraire la racine carrée du résultat ainsi calculé pour obtenir la mesure de la longueur du rectangle circonscrit soit, la « longueur » du triangle (rectangle). Dans les problèmes de dimensions que nous considérons ces racines carrées sont des nombres entiers simples, ici 10, qui peuvent être obtenues au moyen de tables. Il semble qu'au début du deuxième millénaire avant notre ère, les scribes égyptiens n'utilisaient pas des approximations de racines carrées ce qui impose des conditions pour les données du problème. Il en ressort que celui-ci est fabriqué à partir des données qui, en l'occurrence, ici, sont liées aux expressions des doubles de quantièmes impairs. Le *nombre-de-fois* est particulier. Il est le double d'un quantième impair, à savoir, le double de 1/5, soit 1/3 1/15, soit encore, l'inverse du *quotient-de-proportion* du problème M7. Ceci peut laisser sous-entendre que celui qui pose l'exercice sait que 1/3 1/15 est l'expression du double de 1/5. C'est sans doute à cette aune que nous devons juger la considération de l'inverse du *quotient-de- proportion*.

En effet, les procédures « possibles » que nous avons considérées ne semblent pas plus simples à mettre en œuvre que celle utilisée par le scribe. En d'autres termes, l'introduction du calcul de l'inverse qui *a priori* pouvait sembler être insolite, peut se révéler être une bonne voie de résolution. Evidemment, ceci n'a pas lieu dans un contexte plus général où le *quotient-de-proportion* n'est pas le double d'un quantième impair, son inverse peut être moins simple de telle sorte que les raisons que nous avons évoquées ne peuvent pas alors être retenues. Simplement, dans le cas particulier où nous nous sommes placés, à savoir, celui où le *quotient-de-proportion* est le double d'un quantième impair, ce *nombre-de-fois* est inférieur à 1 et comme en M6, il peut sembler plus commode, géométriquement, de commencer par calculer la mesure de la longueur, et donc de passer par le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*.

Pour simplifier les formulations de l'énoncé et de l'algorithme de résolution d'un tel problème, nous pouvons supposer que le *quotient-de-proportion* est le double de l'inverse d'un nombre premier impair p

$$Q = \frac{1}{p} \times 2 \,,$$

et que la mesure T_m de la superficie du triangle (rectangle) vérifie la relation suivante où t est un nombre entier quelconque :

$$10T_m = pt^2 \,.$$

Avec ces hypothèses, nous pouvons formuler l'énoncé général suivant :

> Calculer les mesures, en *khèt*, d'un triangle rectangle dont on connaît la superficie T_m en *milles de terre* et le *quotient-de-proportion* Q inférieur à 1 des dimensions.

Quant à l'algorithme de résolution, nous pouvons le décrire comme suit :

Données	D_1	T_m	Mesure de la superficie du triangle en *milles de terre*
	D_2	$Q = l : L < 1$	*Quotient-de-proportion* ou *nombre -de-fois* que la mesure de la « largeur » est celle de la « longueur »
		$l = L \times Q$	
(1)	$D_1 \times 10$	$T_s = T_m \times 10$	Mesure de la superficie, en *sétchat*, du triangle
(2)	$(1) \times 2$	$R_s = T_s \times 2$	Mesure de la superficie, en *sétchat*, du rectangle circonscrit
(3)	$\overline{D_2}$	$\bar{Q} = 1 : Q$	Calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*
(4)	$(3) \times \overline{D_2}$	$L^2 = R_s \times \bar{Q}$	Carré de la mesure de la « longueur »
(5)	$\sqrt{(4)}$	$L = \sqrt{L^2}$	Mesure, en *khét*, de la « longueur »
(6)	$(4) \times D_2$	$l = L \times Q$	Mesure, en *khét*, de la « largeur »

Avec la forme supposée des données, nous avons successivement :

$$Q = \frac{2}{p} = \frac{l}{L} \quad , \quad \bar{Q} = \frac{p}{2} \quad , \quad 10T_m = pt^2 \,,$$

$$T_s = T_m \times 10 = pt^2 \quad , \quad R_s = T_s \times 2 = 2pt^2 \,,$$

$$L^2 = R_s \times \bar{Q} = p^2t^2 \quad , \quad L = \sqrt{L^2} = pt \quad , \quad l = L \times Q = 2t \,.$$

Bien entendu, l'écriture des deux dernières égalités cache les difficultés opératoires que nous avons soulignées, d'une part, pour calculer l'inverse $\bar{Q}$ du *quotient-de-proportion* et, d'autre part, pour multiplier la mesure de la « longueur » par cet inverse. Pour donner un exemple, le lecteur peut prendre le cas où le *quotient-de-proportion* est le double du quantième 1/19, soit 1/12 1/76 1/114, d'après le *Papyrus Rhind*, ou le *Fragment UC 32159 d'El-Lahoun*, :

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{19} \times 2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} \quad \text{et} \quad \frac{19}{2} = 19 : 2 = 9 + \frac{1}{2} \ .$$

En d'autres termes, d'un point de vue opératoire, la procédure employée par le scribe peut être considérée comme n'étant pas représentative de l'Art égyptien du calcul. Tant le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion* que celui de la mesure de la « largeur » du triangle (rectangle) font intervenir des opérations qui ne sont pas simples à effectuer.

Beaucoup plus tard, dans les papyrus démotiques, le *nombre-de-fois* est supérieur à 1 et la procédure suivie sera différente. Ce sera celle qui est employée en M7. Cette fois les solutions sont approchées et, dès lors, on opère avec des expressions fractionnaires assez complexes. N'oublions pas aussi que les scribes utilisent alors des approximations de racines carrées. Autrement dit, le contexte a considérablement changé mais la primeur du calcul de la mesure de la longueur ainsi que l'utilisation de l'inverse du *quotient-de-proportion* pour calculer la mesure de la largeur demeurent.

Bibliographie

ARCHIBALD Raymond Clare, 1927, Bibliography of Egyptian Mathematics with special references to the Rhind Mathematical Papyrus and sources of interest in its study *in* Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 178-179, 187-188.

CANTOR Moritz, 1880-1907, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Teubner, vol. 1, 1880, 3ème éd. 1907 ; vol. 2, 1894.

CHACE Arnold et *alii*, 1927-1929, *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058*, 2 vol., Oberlin, Mathematical Association of America, 1927-1929.

CLAGETT Marshall, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book*, Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics, Philadelphie, American Philosophical Society, 1999, 215, 388,

COUCHOUD Sylvia, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique, Paris, Éditions Le Léopard d'or, 1993; pp. .

GILLINGS Richard, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, Cambridge, The Massachusetts Institute of Technology, 1972 ; réimp., New York, Dover, 1982.

GUNN Battiscombe, PEET Eric, 1929, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, *The Journal of Egyptian Archaeology* 15 (1929) 167-185, pp. 171-174.

IMHAUSEN Annette, 2003, *Ägyptische Algorithmen*. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathematischen Aufgabentexten, Wiesbaden, Harrassowitz Verlag, 2003.; pp. 78-79, 83-84, 316.

MICHEL Marianne, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, Numération, métrologie, arithmétique, géométrie et autres problèmes, Bruxelles, Éditions Safran, 2014, pp. 285-290.

NEUGEBAUER Otto, 1931_2, Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik Astronomie und Physik* 1 (1931) 413-451; pp. 415-416.

PEET Eric, 1923_1, *The Rhind Mathematical Papyrus British Museum 10057 and 10058*, introduction, transcription, translation and commentary, Londres, The University Press of Liverpool, Hodder and Stougthon, 1923 ; réimp. Nendeln (Liechtenstein), Kraus Reprint, 1970.

PEET Eric, 1931_2, Mathematischer Papyrus des Staadtlichen Museums der Schönen Künste in Moskau von W.W. Struve, *The Journal of Egyptian Archaeology* 17 (1931) 154-160, pp. 154-155, 160.

REINEKE Walter-Friedrich, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* Thèse, 2 vol., Berlin, Humbolt-Universität,1964, pp. 150-151.

SPALINGER Antony, 1990, The Rhind Mathematical Papyrus as a Historical source, *Studien zur Altägyptischen Kultur* 17 (1990) 295-337.

STRUVE Wasili, 1930 (1977), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, herausgegeben und kommentiert unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von B. A. Turaeff, Berlin, Spinger, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, 1930, rééd. , Würzburg, Jal-reprint, 1973, pp. 128-133.

TSINSERLING D. P. , 1925, Geometriya u drevnikh egitpyan (Géométrie dans l'ancienne Égypte), *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'Union des Républiques Soviétiques Socialistes*, Léningrad, 19 (1925) 541-568, pp. 559, 565.

TURAEV Boris, 1917, The volume of the truncated pyramid in Egyptian mathematics, *Ancient Egypt*, Londres, 1917, pp. 100-102.

VOGEL Kurt, 1930_3, Der Moskauer mathematische Papyrus, *Archiv für Geschichte der Mathematik der Naturwissenschaften und der Technik* 13 (1930) 446-463 ; pp.454-455, 462.

VOGEL Kurt, 1958, *Vorgriechische Mathematik*, 2 t., Hannovre, Hermann Schroedel Verlag ; Paderborn, Verlag Ferdinand Schöningh, 1958; p. 65.

QUELQUES RÉFLEXIONS THÉORIQUES

Dans les problèmes de dimensions, qu'ils soient écrits en hiératique ou en démotique, les scribes égyptiens effectuent une opération qui, *a priori*, aujourd'hui, peut nous sembler être insolite, celle relative au calcul de l'inverse de ce que nous appelons le *quotient-de-proportion* ou le *nombre-de-fois*. En effet, puisque cet inverse $\bar{Q}$ intervient ensuite comme multiplicateur, nous pourrions utiliser la division directe :

$$N \times \bar{Q} = N : Q \, .$$

Ceci nous amène à conduire quelques études théoriques en vue d'essayer de déterminer la pertinence de cette démarche.

Une généralisation du problème M17 du *Papyrus de Moscou*

S'agissant d'une étude théorique, nous nous plaçons dans un cadre algébrique où il s'agit de déterminer, dans la structure numérique égyptienne, la solution entière du système

$$xy = P \quad \text{et} \quad y = x \times Q = x \times \left(\frac{1}{p} \times 2\right),$$

où P est un nombre entier et le *quotient-de-proportion* Q est le double de l'inverse d'un nombre premier p. En M17, nous avons :

$$P = 40 \quad et \quad Q = \frac{1}{p} \times 2 = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \; .$$

Il va sans dire que l'existence de la solution impose certaines relations entre les données.

Forme de la solution et des données

Tout d'abord, l'entier p étant impair, il existe un nombre entier p' tel que :

$$p = 2p' + 1 \quad \text{d'où} \quad \bar{Q} = \left(\frac{2}{p}\right)^{-1} = \frac{p}{2} = p' + \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, l'inverse $p/2$ du *quotient-de-proportion*, a une expression numérique très simple puisqu'elle est égale à la somme d'un entier, à savoir, p', et de 1/2. Ensuite, nous avons immédiatement

$$Q = \frac{y}{x} = \frac{2}{p},$$

d'où

$$py = 2x \, .$$

Le second membre étant pair, il en est de même du premier égal à py. Mais, le nombre premier p est impair, donc y est pair. Autrement dit, il existe un nombre entier t tel que :

$$y = 2t.$$

D'où

$$\boxed{Q = \frac{2}{p} = \frac{y}{x} \quad , \quad y = 2t \quad , \quad x = pt \quad , \quad xy = P = 2pt^2 \, .}$$

Une première opération : le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*

Nous l'avons dit en introduction : le scribe nous propose d'effectuer une opération *a priori* insolite, celle du calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*. Dans le cadre de notre étude théorique, nous pouvons penser qu'il peut remarquer que ce dernier est le double d'un quantième et, par suite, il peut en déduire que son inverse est la moitié de l'inverse de ce quantième. En M17, ceci revient à affirmer que l'inverse de 1/3 1/15 est la moitié de l'inverse de 1/5, donc la moitié de 5, soit 2 1/2 :

$$Q = \frac{1}{5} \times 2 = 2 : 5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \quad , \quad \bar{Q} = 1 : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = 5 : 2 = 2 + \frac{1}{2}.$$

De manière générale, si l'expression du double d'un quantième est moins connue, pensons, par exemple, à celle du double de 1/19, il faut effectuer la division de 1 par le *quantième de-proportion*. Dans le cas de M17, nous pouvons procéder comme suit :

1	1/3 1/15	(initialisation)
\ 2	2/3 1/10 1/30	(*doublement* et R2/15)
\ 1/2	1/6 1/30	(*dédoublement*)
Total	1	

Pour la totalisation, en tenant compte de l'égalité

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6},$$

qui semble être bien connue des scribes égyptiens, nous avons successivement

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \, .$$

Bien entendu, pour effectuer le total, le scribe peut toujours utiliser la méthode égyptienne que nous appelons des *auxiliaires numériques* sorte de palliatif à nos réductions au même dénominateur. Ici, ceci conduit à raisonner en trentièmes :

2/3	1/10	1/30	1/6	1/30	Total	1
20	3	1	5	1	Total	30

ce qui revient, aujourd'hui, à écrire :

$$30 \times \frac{2}{3} = 20 \quad , \quad 30 \times \frac{1}{10} = 30 : 10 = 3 \quad , \quad 30 \times \frac{1}{30} = 30 : 30 = 1 \quad , \quad 30 \times \frac{1}{6} = 30 : 6 = 5 \, ,$$

ou

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{30} \times 20 \quad , \quad \frac{1}{10} = \frac{1}{30} \times 3 \quad , \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \times 5 \quad , \quad \frac{1}{30} = \frac{1}{30} \times 1 \, ,$$

de telle sorte que

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{30}(20 + 3 + 1 + 5 + 1) = \frac{1}{30} \times 30 = 1 \, .$$

Quoiqu'il en soit, nous avons :

$$\boxed{1 : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = 2 + \frac{1}{2} = 1 : Q = \bar{Q} = 1 : \frac{2}{p} = \frac{p}{2} = p' + \frac{1}{2} .}$$

Dans le cas général, nous retrouvons les ingrédients classiques pour mener à bien cette division : *doublements successifs* qui peuvent nécessiter la connaissance des expressions des doubles de certains quantièmes (voir, ici, celui de 1/15), *dédoublement* et *auxiliaires numériques* sans oublier des réductions éventuelles lors de la totalisation.

Nous pourrions aussi utiliser le fait que 1/3 1/15 est l'expression du double de 1/5 donc, qu'en le multipliant par 5, on obtient 2 pour résultat

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5} \times 2 \quad , \quad \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) \times 5 = \left(\frac{1}{5} \times 2\right) \times 5 = 2 \, ,$$

et procéder comme suit

1	1/3 1/15	(initialisation)
5	2	(*observation*)
2 1/2	1	(*dédoublement*)

Dans le cadre général où nous nous sommes placés, ceci revient à écrire

1	$Q = \frac{2}{p}$	(initialisation)
$p = 2p' + 1$	2	(*observation*)
$p' + \frac{1}{2}$	1	(*dédoublement*)

Bien entendu, nous pouvons procéder de la même manière pour toute division par le *quotient-de-proportion*.

Il n'en demeure pas moins que le *quotient-de-proportion* étant, en M17, le quotient de la mesure de la « largeur » par celle de la « longueur », son inverse n'est autre que le quotient de la mesure de la « longueur » par celle de la « largeur », ce qui, *a priori*, ne change rien au fondement d'une procédure de résolution du problème et rend insolite, à cet instant, cette manière d'opérer :

$$\bar{Q} = 1 : Q = \frac{1}{Q} = 1 : (l : L) = 1 : \frac{l}{L} = \frac{L}{l} = L : l\,.$$

Toutefois, alors que l'expression du double d'un quantième est assez complexe, celle de son inverse est très simple, somme d'un nombre entier et de 1/2.

Une deuxième opération : le calcul du carré de la mesure de la « longueur »

En M17, le scribe demande ensuite de multiplier la mesure, 40, de la superficie du rectangle circonscrit par le nombre qu'il vient de trouver, à savoir, $2\ 1/2$. Il obtient ainsi, sans qu'il l'affirme, le carré de la mesure de la « longueur », soit, dans notre cadre algébrique, le carré de la plus grande inconnue. En effet, nous pouvons écrire :

$$40 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 100 = R_s \times \bar{Q} = (L \times l) \times \frac{L}{l} = L^2\,.$$

Cette opération est immédiate :

1	40	(initialisation)
\ 2	80	(*doublement*)
\ 1/2	20	(*dédoublement*)
Total	100	$(80 + 20 = 100)$

Il en est de même dans le cas général où nous nous sommes placés puisqu'il s'agit de multiplier un nombre entier, en l'occurrence P, par la somme d'un entier, p', et de 1/2. Autrement dit, il suffit d'utiliser des *doublements successifs* de nombres entiers et un *dédoublement* :

$$P \times \bar{Q} = 2pt^2 \times \frac{p}{2} = 2pt^2 \times \left(p' + \frac{1}{2}\right) = p^2t^2 = x^2\,.$$

Une troisième opération : l'extraction de la racine carrée

Nous passons rapidement sur la troisième opération effectuée par le scribe en M17, celle de l'extraction de la racine carrée. Evidemment, compte tenu de la forme des données, cette extraction est exacte :

$$\sqrt{p^2t^2} = pt = x = \sqrt{100} = 10\,.$$

Une quatrième opération : le calcul de l'autre dimension

Pour conclure, le scribe obtient la mesure de la « largeur » en multipliant celle de la « longueur » par le *quotient-de-proportion* :

$$y = x \times Q = (pt) \times \frac{2}{p} = 2t\,.$$

Mais cette simplicité algébrique cache certaines difficultés opératoires. En M17, cette multiplication pourrait se présenter comme suit :

	1	10	(initialisation)
	2/3	6 2/3	(*table de deux-tiers*)
\	1/3	3 1/3	(*dédoublement*)
	1/10	1	(division par dix)
	2/3 de 1/10	2/3	(*table de deux-tiers*)
	1/3 de 1/10	1/3	(*dédoublement*)
	1/30	1/3	(simplification)
\	1/15	2/3	(*doublement*)
	Total	4	$\left(3+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=3+1=4\right)$

Ici, nous avons pu effectuer assez facilement cette multiplication en considérant les multiplicateurs 2/3 et 1/10. De manière générale, l'expression du double d'un quantième est une somme de quantièmes et l'on est le plus souvent amené à faire des calculs annexes, à savoir, des divisions de l'inconnue qui vient d'être calculée par les inverses de ces divers quantièmes, ici,

$$10:3=3+\frac{1}{3} \quad , \quad 10:15=\frac{2}{3}.$$

D'où

$$10\times\frac{1}{3}=3+\frac{1}{3} \quad , \quad 10\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}.$$

Une deuxième procédure : le calcul direct du carré de la mesure de la « longueur »

Muni de ces réflexions théoriques nous pouvons nous interroger sur la pertinence de la procédure employée par le scribe et en particulier de la comparer au calcul direct par division, à savoir :

$$P:Q=2pt^2:\frac{2}{p}=p^2t^2\,.$$

Dans le cas du M17, nous devons effectuer la division de 40 par 1/3 1/15 qui pourrait se présenter comme suit :

	1	1/3 1/15	(initialisation)
	2	2/3 1/10 1/30	(*doublement* et R2/15)
\	20	8	$(6+\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}=8)$
	40	16	(*doublement*)
\	80	32	(*doublement*)
Total	100	40	$(8+32=40)$

Il est évident que, compte tenu du résultat, nous avons utilisé la multiplication par 10 qui, ici, s'introduit naturellement à partir des quantièmes 1/10 et 1/30. Mais nous pourrions aussi utiliser le fait que 1/3 1/15 est l'expression du double de 1/5 donc, qu'en le multipliant par 5, on obtient 2 pour résultat

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{1}{5}\times 2 \quad , \quad \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\times 5=\left(\frac{1}{5}\times 2\right)\times 5=2\,,$$

et procéder comme suit

	1	1/3 1/15	(initialisation)
	5	2	(*observation*)
	10	4	(*doublement*)
\	100	40	(*multiplication par 10*)

Resituée dans le cadre général où nous nous sommes placés, cette manière d'opérer est tout aussi pratique puisque nous obtenons ainsi comme résultat de cette multiplication partielle le nombre entier 2 et il suffit d'effectuer ensuite des *doublements successifs* pour achever la division. Notons qu'au vu du résultat, à savoir, p^2t^2, cette introduction du nombre p comme premier multiplicateur, peut être, théoriquement, tout à fait naturelle.

Une troisième procédure : l'utilisation de celle suivie en M7

Une autre résolution consiste à suivre la voie empruntée par le scribe en M7. Nous avons alors un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$y=\sqrt{P\times Q} \quad et \quad x=y\times\bar{Q}.$$

Nous avons alors

$$P\times Q=2pt^2\times\frac{2}{p}=4t^2 \quad , \quad y=2t \quad , \quad x=y\times\bar{Q}=2t\times\frac{p}{2}.$$

Cette fois nous avons deux opérations nouvelles. Tout d'abord, la multiplication de P par Q, c'est-à-dire, en M17 celle de 40 par 1/3 1/15 qui peut s'effectuer comme suit :

	1	40	(initialisation)
	2/3	26 2/3	(*table de deux-tiers*)
\	1/3	13 1/3	(*dédoublement*)
	1/10	4	(division par dix)
	2/3 de 1/10	2 2/3	(*table de deux-tiers*)
	1/3 de 1/10	1 1/3	(*dédoublement*)
	1/30	1 1/3	(réduction)
\	1/15	2 2/3	(*doublement*)
	Total	16	$\left(13+\frac{1}{3}+2+\frac{2}{3}=16\right)$

Nous retrouvons la démarche opératoire suivie sans doute par le scribe lorsqu'il a multiplié 10 par 1/3 1/15 pour calculer la mesure de l'autre dimension. En fait, comme nous l'avons indiqué précédemment, nous pourrions utiliser le multiplicateur 1/5 et procéder comme suit :

	1	40	(initialisation)
	2/3	26 2/3	(*table de deux-tiers*)
\	1/3	13 1/3	(*dédoublement*)
	1/5	8	(division par 5)
	2/3 de 1/5	5 1/3	(*table de deux-tiers*)
	1/3 de 1/5	2 2/3	(*dédoublement*)
\	1/15	2 2/3	(réduction)
	Total	16	$\left(13+\frac{1}{3}+2+\frac{2}{3}=16\right)$

Il ne reste plus qu'à multiplier 4, racine carrée de 16 que nous venons de trouver par l'inverse du *quotient-de-proportion* qui a été calculé par le scribe, soit, $2\ 1/2$, opération immédiate qui pourrait se présenter comme suit :

	1	4	(initialisation)
\	2	8	(*doublement*)
\	1/2	2	(*dédoublement*)
Total		10	

En résumé, nous devons comparer deux multiplications de nombres entiers par le même nombre, à savoir, le *quotient-de-proportion*. Elles peuvent donner lieu aux mêmes difficultés et aux mêmes considérations, à savoir, ici, celle du multiplicateur 2/3 et celle de la division auxiliaire par 10 sous la forme du multiplicateur 1/10.

Une quatrième procédure : celle, « directe », déduite de M7

Il nous reste à examiner une quatrième procédure. Elle consiste à remplacer la multiplication précédente par la division directe. Nous avons alors un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$y=\sqrt{P\times Q}\quad et\quad x=y:Q.$$

Nous avons alors

$$P\times Q=2pt^2\times\frac{2}{p}=4t^2\quad,\quad y=2t\quad,\quad x=y:\frac{2}{p}=2t:\frac{2}{p}\ .$$

Autrement dit, en M17, il nous reste à considérer la division de 4 par 1/3 1/15, opération qui pourrait se présenter comme suit en suivant la technique utilisée pour diviser 40 par 1/3 1/15 :

	1	1/3 1/15	(initialisation)
	5	2	(*observation*)
\	10	4	(*doublement*)

En guise de conclusion

L'examen des diverses procédures nous laisse un peu dubitatifs. En fait, nous devions nous y attendre car il suffit de considérer les opérations qui peuvent être effectuées lorsque nous considérons le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion* sous la forme d'une division. En effet, nous pouvons dresser le tableau suivant :

M17	Division (de 1) par Q	Multiplication par $\bar{Q}$	Multiplication par Q
M17 « direct »		Division par Q	Multiplication par Q
M7	Multiplication par Q	Division (de 1) par Q	Multiplication par $\bar{Q}$
M7 « direct »	Multiplication par Q		Division par Q

Toutes ces procédures comportent une division d'un nombre entier par le *quotient-de-proportion* et une multiplication d'un nombre entier par le *quotient-de-proportion*. Les techniques utilisées par le scribe comportent en outre la multiplication immédiate d'un nombre entier par l'inverse du *quotient-de-proportion*. Par conséquent, seul le cadre de ces opérations peut jouer en faveur de l'une de ces procédures. Il s'avère qu'en M17 et en M7, la division est celle que l'on peut effectuer pour calculer l'inverse de 1/3 1/15. Or, dans ces deux problèmes, les *quotients-de-proportion* sont inverses l'un de l'autre. Autrement dit, nous pouvons penser que le scribe peut utiliser ce résultat et ainsi justifier la procédure qu'il a employée en M17. Le passage par l'inverse du *quotient-de-proportion* n'est donc pas aussi étrange qu'il semblerait l'être !

Une généralisation du problème M7 du *Papyrus de Moscou*

S'agissant d'une étude théorique, nous nous plaçons dans un cadre algébrique où il s'agit de déterminer, dans la structure numérique égyptienne, la solution entière du système

$$xy = P \quad \text{et} \quad y = x \times Q = x \times (p : 2)\,,$$

où P est un nombre entier et le *quotient-de-proportion* Q est la moitié d'un nombre premier p. En M7, nous avons :

$$P = 40 \quad et \quad Q = p : 2 = 5 : 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}\ .$$

Il va sans dire que l'existence de la solution impose certaines relations entre les données.

Forme de la solution et des données

Une étude semblable à celle que nous avons conduite précédemment donne la forme suivante de la solution et des données (il suffit d'inverser les inconnues x et y) :

$$Q = \frac{p}{2} = \frac{x}{y} \quad , \quad xy = P = 2pt^2 \quad , \quad y = pt \quad , \quad x = 2t\,.$$

Une première opération : le calcul du carré de la mesure de la « longueur »

Le scribe demande de multiplier la mesure, 40, de la superficie du rectangle circonscrit par le *quotient-de-proportion*, à savoir, 2 1/2. Il obtient ainsi, sans qu'il l'affirme, le carré de la mesure de la « longueur ». En effet, nous pouvons écrire :

$$40 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 100 = R_s \times Q = (L \times l) \times Q = L \times (l \times Q) = L \times L = L^2\,.$$

Vu la simplicité du multiplicateur, comme nous l'avons précédemment constaté, cette opération est immédiate.

Une deuxième opération : l'extraction de la racine carrée

Nous passons rapidement sur la troisième opération, celle de l'extraction de la racine carrée. Evidemment, compte tenu de la forme des données, cette extraction est exacte :

$$\sqrt{p^2t^2} = pt = x = \sqrt{100} = 10\,.$$

Une troisième opération : le calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*

Nous l'avons dit en introduction : le scribe nous propose d'effectuer une opération *a priori* insolite, celle du calcul de l'inverse du *quotient-de-proportion*. Dans le cadre de notre étude théorique, nous pouvons penser qu'il peut remarquer que le double de ce dernier est un nombre entier ; par suite, il peut en déduire que son inverse est le double de l'inverse de ce nombre. En M7, ceci revient à affirmer que l'inverse de 2 1/2 est le double de l'inverse de 5, donc est égal à 1/3 1/15 :

$$Q \times 2 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \times 2 = 5 \quad , \quad Q = 5 \times \frac{1}{2} \quad , \quad \bar{Q} = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}\,.$$

De manière générale, il faut effectuer la division de 1 par le *quantième de-proportion*. Dans le cas de M7, si nous voulons parvenir au résultat donné par le scribe, nous pouvons l'effectuer comme suit :

	1	2 1/2	(initialisation)
	2/3	1 2/3	(calcul ou *table de deux-tiers*)
\	1/3	1/2 1/3	(*dédoublement*)
Manque		1/6	$(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}=1)$
\	1/15	1/6	

Il suffit de multiplier 2 1/2 par 6 pour obtenir 15, inverse du dernier multiplicateur. En fait, d'un point de vue général, cette opération est moins simple tout en mettant en évidence la valeur du double d'un quantième. On peut procéder comme suit

	1	$\frac{p}{2}$	(initialisation)
	2	p	(*doublement*)
	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{2}$	(*inversion*)
\	$\frac{2}{p}$	1	(*doublement*)

Tout revient donc à calculer le double du quantième $1/p$.

Une quatrième opération : le calcul de la mesure de la « largeur »

Aujourd'hui, nous pouvons vérifier qu'il ne reste plus qu'à effectuer le produit de l'inverse du *quotient-de-proportion* que nous venons de trouver et de la mesure de la « longueur », à savoir, 10 :

$$L\times\bar{Q}=L\times\frac{l}{L}=l=10\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)=4\,.$$

Cette multiplication par 1/3 1/15 peut s'effectuer comme nous l'avons indiqué précédemment :

	1	10	(initialisation)
	2/3	6 2/3	(*table de deux-tiers*)
\	1/3	3 1/3	(*dédoublement*)
	1/5	2	(division par 5)
	2/3 de 1/5	1 1/3	(*table de deux-tiers*)
	1/3 de 1/5	2/3	(*dédoublement*)
\	1/15	2/3	(réduction)
	Total	4	$\left(3+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=4\right)$

Une deuxième procédure : le calcul direct du carré de la mesure de la « largeur »

Muni de ces réflexions théoriques nous pouvons nous interroger sur la pertinence de la procédure employée par le scribe et en particulier de la comparer au calcul direct par division :

$$l = L : Q = pt : \frac{p}{2} = 2t\,.$$

Dans le cas du M7, nous devons effectuer la division de 10 par 2 1/2, opération cette fois immédiate qui pourrait se présenter comme suit :

	1	2 1/2	(initialisation)
	2	5	(*doublement*)
\	4	10	(*doublement*)

Il n'est pas besoin de larges commentaires pour indiquer combien cette procédure est meilleure que celle utilisée par le scribe. Dans le cas général où nous nous sommes placés, il suffit d'effectuer des *doublements successifs* dont le premier donne un résultat entier et, par suite, les autres sont immédiats :

1	$p' + \frac{1}{2}$	(initialisation)
2	$2p + 1'$	(*doublement*)
…….	………	(*doublement* ……)

Une troisième procédure : l'utilisation de celle suivie en M17

Une autre résolution consiste à suivre la voie empruntée par le scribe en M17. Nous avons alors un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$x = \sqrt{P \times \bar{Q}} \quad et \quad y = x \times Q\,.$$

Il s'agit alors d'effectuer des multiplications que nous avons déjà conduites, celle de 40 par 1/3 1/15 et celle plus élémentaire de 4 par 2 1/2.

Une quatrième procédure : celle, « directe », déduite de M17

Il nous reste à examiner une quatrième procédure. Elle consiste à remplacer la multiplication précédente par la division directe. Nous avons alors un algorithme auquel peuvent correspondre les égalités suivantes :

$$x = \sqrt{P : Q} \quad et \quad y = x \times Q.$$

Il est évident que le *quotient-de-proportion* ayant une expression simple, les opérations correspondantes sont élémentaires. Par exemple, pour la première, en M7, nous avons à multiplier 40 par 2 1/2, ce qui peut donner lieu à la présentation suivante :

1	40	(initialisation)
\ 2	80	(*doublement*)
\ 1/2	20	(*dédoublement*)
Total	100	

Dans le cas général où nous nous sommes placés, il suffit d'effectuer des *doublements successifs* dont le premier donne un résultat entier et, par suite, les autres sont immédiats. Pour terminer par un *dédoublement* d'un nombre entier.

En guise de conclusion

Cette fois, l'examen des diverses procédures nous laisse moins perplexes. Certes, nous pouvons dresser le même tableau que pour l'étude que nous venons de consacrer au problème M17 et en faire les mêmes remarques :

M17	Division (de 1) par Q	Multiplication par $\bar{Q}$	Multiplication par Q
M17 « direct »		Division par Q	Multiplication par Q
M7	Multiplication par Q	Division (de 1) par Q	Multiplication par $\bar{Q}$
M7 « direct »	Multiplication par Q		Division par Q

Toutes ces procédures comportent une division d'un nombre entier par le *quotient-de-proportion* et une multiplication d'un nombre entier par le *quotient-de-proportion*. Les techniques utilisées par le scribe comportent en outre la multiplication immédiate d'un nombre entier par l'inverse du *quotient-de-proportion*. Par conséquent, seul le cadre de ces opérations peut jouer en faveur de l'une de ces procédures. Il s'avère que, pour le problème M7, la procédure directe ne comporte que des opérations élémentaires faisant intervenir l'expression simple du *quotient-de-proportion*. Elle aurait donc mérité d'être retenue par le scribe et, par suite, le passage par le calcul de son inverse ne s'imposait pas. On peut penser qu'en nommant ce que nous appelons le *quotient-de-proportion*, le scribe a voulu mettre l'accent sur le *nombre-de-fois* qu'il représente et non pas sur le quotient qui préside à son obtention. Autrement dit, en disant que le scribe exprime la donnée du *quotient-de-proportion* sous une forme multiplicative, par exemple,

$$L = l \times Q \,,$$

nous nous éloignons peut-être du cadre dans lequel se place le scribe, à savoir, celui du *nombre-de-fois*.

Glossaire dimensions

Ce glossaire est relatif aux termes que nous trouvons dans les *Papyrus de Moscou* lors des problèmes M6, M7 et M17 du *Papyrus de Moscou* et dans une partie du *Fragment UC 32 162 d'El-Lahoun*, textes relatifs à des calculs de dimensions qui, soit ne figurent pas dans le *Papyrus Rhind*, soit ont une acception particulière. Nous indiquons la ligne de leur occurrence comme indexation des problèmes de Moscou ou de la lettre L pour le *Fragment UC 32 162 d'El-Lahoun*. Par ordre chronologique, nous en donnons les diverses traductions effectuées par les principaux éditeurs ou commentateurs. Nous avons mis en rouge nos traductions et en bleu nos adaptations lorsqu'elles en différent. Afin de ne pas alourdir les notes de bas de page, nous avons indiqué les références bibliographiques seulement lors de la première occurrence. Pour de plus amples indications, voir les divers exemples ainsi que la bibliographie générale.

ahèt { AH.t}

Voir **sébédèt nèt 2000 èm ahét.ès**, **sépédèt nèt ahèt 2$_{m}$.**
M7$_{2, 3}$, M17$_{2}$.
Rhind : *surface, superficie,*
Gunn, Peet[134] : *land, area,*
Struve[135] : *Fläche,*
Neugebauer[136] : *Fläche,*
Reineke[137] : AH.t, *Acker, Fläche,*
Couchoud[138] : AHt, *surface, champ,*
Clagett[139] : *area or land surface,*
Imhausen[140] : AH.t, *Fläche*,
Michel[141] : AH.t, *aire,*
Dans les problèmes considérés le terme *ahèt* (AH.t) désigne une **superficie** sans doute de terre cultivable. En M7, le scribe donne la mesure de la superficie en *milles de terre* alors qu'en M17 il l'exprime en *coudées de terre*. Ceci donne lieu, aussi, à deux formulations différentes pour son *doublement* : traduit en termes modernes, en M7 il insiste sur la superficie et en M17 sur la mesure.

(ât ?) { (a.t ?) } 

Voir **(â t ?) nèt sététy**, **tèp èn irèt (ât ?)**.
M6$_{1, 2}$.
Rhind : **at**, *enclos, magasin.*
Gunn, Peet : a.t, *enclosure*,
Struve : p.t, *Rechteck,*
Neugebauer : *[Rechteck],*
Reineke : p.t, *Rechteck*, *Fläche,*

[134] Gunn, Peet, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus.
[135] Struve, 1930, *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*.
[136] Neugebauer, 1931, Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte.
[137] Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter*.
[138] Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*.
[139] Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book,* Volume Three.
[140] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*.
[141] Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*.

Gillings[142] : *rectangle,*
Couchoud: p.t, *rectangle*, *pièce, surface rectangulaire,*
Clagett : *rectangle*,
Imhausen : a.t, *Kammer (chambre)*,
Michel : at, *local rectangulaire*.
La transcription et par suite la traduction du terme écrit par le scribe est délicate car il figure deux fois dans une lacune du M6. Battiscombe Gunn et Eric Peet y consacrent six lignes dans les notes de leur transcription. Ils lisent le déterminatif de la maison (O1 dans la classification de Gardiner) précédé sans doute des « lettres » *â* (a) et *t* (t) permettant la lecture *ât* (a.t), mot qui peut signifier une pièce, une maison ou encore un enclos. Wasili Struve retient les « lettres *p* (p) et *t* (t) et le déterminatif de la pièce d'eau (N37 dans la même classification). Sylvia Couchoud le suit dans cette transcription mais considère le signe du papyrus enroulé (Y1) comme déterminatif. Tous les deux donnent la même acception « rectangle ». Comme Annette Imhausen et Marianne Michel, nous avons retenu la première transcription et adopté l'acception **enclos (rectangulaire)**. Lors de notre adaptation, nous pourrions parler d'un recangle. Nous avons préféré enclos rectangulaire. Les dimensions du rectangle étant 3 et 4, cela conduit à une très petite pièce d'habitation si l'on choisit la *coudée* comme unité de mesure. En revanche, comme le soulignent Gunn et Peet, cela convient pour un enclos lorsque nous considérons le *khèt* qui vaut 100 *coudées* soit plus de 50 mètres. Notons que, pour la deuxième occurrence, la lacune est entourée de 5 traces. À droite 2, en bas 1 et à gauche 2. Les deux signes du bas à droite semblent être les restes d'un signe petit et arrondi. La trace du haut correspond à un signe petit qui doit se développer sur la gauche. Et à sa gauche un trait vertical avec en dessous un signe qui ressemble à la « lettre » k mais de petite dimension. Ce signe est passé sous silence par les différents traducteurs.

(ât ?) nèt sététy [12] { (a.t?) n.t st.tjj [12] }

M6₂.
Gunn, Peet: *An enclosure of a set and 2 arurae,*
Struve: *ein R[echtec]k von < 12 in der > Fläche (* sttj*),*
Neugebauer: *ein R[echteck] von < 12 in der > Fläche (* sttj*),*
Reineke : p.t n.t st.t, *ein Rechteck von [12 in] der Fläche,*
Gillings : *a rectangle of 12 in the area [is],*
Couchoud : pt nt stwtjj, *Un rectangle d'une surface de 12,*
Clagett : *A rectangle 12 setjat in [area]*,
Imhausen : a.t n.t sTA.t <1>[SIC !], *Eine Kammer von 12* sTA.t,
Michel : [at] n sttjj (12), *une aire de (12).*
Un (enclos rectangulaire ?) d'une superficie de [12].
Un enclos rectangulaire d'une superficie de 12

didi.èk *E* { djdj.k *E* }

Voir **didi.k 3' 15' iou.èf hèr (ou)zékhou**, **rédi**.
M17₃.
Gunn, Peet: djdj.k *E*, *You must put E (2/5),*
Struve : *(und) du gibst (noch) E,*
Neugebauer : *(und) du gibst du (noch) E,*
Reineke : dj.n.k *E*, *du gegeben hast E,*
Couchoud : djdj.k *E*, *tu dois en mettre E,*
Clagett : *you must put E*,

[142] Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs.*

Imhausen : dj. n. k *E*, *du hast E veranlaßt,*
Michel : dj(w) n.k *E*, *que l'on te donne E.*
Tu dois (en) donner *E*. Tu dois en mettre *E*.
Les transcriptions qui sont proposées sont diverses. En fait, le scribe trace une ligature où Gunn, Peet et S. Couchoud voient deux fois le signe du bras tandis que W. Reineke, A. Imhausen et M. Michel optent pour la lettre n comme deuxième marque. Il semble que l'acception mathématique conduisant à une sorte d'obligation, nous amène à suivre les premiers commentateurs. De plus, nous devons ajouter le pronom adverbial « en » afin de préciser que l'on ne donne pas *E* pour la mesure de la base mais que la mesure de la base est le *E* de la hauteur.

didi.k 3' 15' iou.èf hèr (ou)zékhou { djdj.k 3' 15' jw.f Hr (w)zxw }

M17₃.
Gunn, Peet : *you must put 2/5 thereof on the breath,*
Struve : *(und) du gibst (noch) 1/3 1/15,*
Neugebauer: *gibst du 3'+15' auf der Breite (* Hr sx.w*),*
Reineke : dj.n.k 3' 15' jw.f Hr sxw, *wenn du gegeben hast 1/3 1/15 (davon, so) ist es auf der Breite,*
Couchoud : dd.k 3' 15' jrjj Hr (w)sxw, *tu dois en mettre 1/3 1/15 à la largeur,*
Clagett : *you must put 1/3 1/15 (i.e., 2/5) therefore on its breadth,*
Imhausen: dj.n.k 3' 15' jw.f Hr wsx, *du hast 3' 15' veranlaßt (und) es ist die Breite,*
Michel : dj(w) n.k 3' 15' jw.f Hr sxw, *et que l'on te donne 1/3 1/15 pour ce qui est la largeur.*
Tu dois (en) donner 3' 15' qui est sur la « largeur ».
Tu dois en mettre 1/3 1/15 pour la base.

dit.èk { dj.t.k }

Voir **ir dit.èk hèr aou**.
M17₃.
Gunn, Peet: dj.t.k, *you put*, Prospective relative form" (Gunn, Peet),
Struve : *du gibst,*
Neugebauer : *du gibst,*
Reineke : dj.t.k, *du gibst,*
Couchoud : dit.k, *tu mets,*
Clagett : *you put,*
Imhausen : dj.t.k, *du gibst,*
Michel : dj<t>.k, *tu donnes*.
On a affaire à une forme de participe substantivé du verbe *rédi* (rdj) qu'il est difficile de traduire de l'égyptien dans nos langues d'une manière littérale. Mot à mot cela donnerait quelque chose comme « ton donné », et par extension, « tu donnes ». En quelque sorte nous avons suivi les transcription et traduction proposées par la plupart des commentateurs : **tu donnes**, tu mets.

èr gémèt ouâ {r gm.t wa}

M6₃.
Gunn, Peet: *so as to find 1,*
Struve : *um zu finden Eins,*
Vogel[143] : *dividiere 1,*
Neugebauer: *um zu finden Eins,*

[143] Vogel, 1958, *Vorgriechische Mathematik*.

Reineke : *um zu finden 1*,
Gillings : *until you get 1*,
Couchoud : r gmt wa, *pour obtenir 1,*
Clagett : *to get 1*,
Imhausen : r gm.t 1, *Dann dividierst du 1,*
Michel : r gm.t wa, *pour trouver 1*.
Jusqu'à trouver un. Tu diviseras 1.

E pou { *E* pw }

M7₆.
Gunn-Peet: *It is E,*
Struve: *Es ist E,*
Neugebauer: *E (Hundertellen) ist,*
Reineke: *E sind es,*
Couchoud: *E* pw, *E est,*
Clagett: *[hence it is] E [khet],*
Imhausen: E pw, *Es sind E,*
Michel: E pw, *C'est E.*
C'est *E*.

E pou èm aou èr *P* èm ouzékhou { *E* pw m Aw n *P* m wzxw }

M7₆.
Gunn, Peet: *It is 10 (* khet*) in lenght by 4 (*khet*) in breadth*,
Struve : *Es ist E auf der Länge für die P auf der Breite*,
Neugebauer: *Es ist E auf der Länge für die P auf der Breite*,
Reineke : *E sind es Länge, für P in der Breite*,
Couchoud : *E* pw m Aw r *P* m wsxw, E *est la longueur (multiplier) par P pour la largeur*,
Clagett : *[hence it is] 10 [khet] in the length (i.e., kathete) and 4 [khet] in its breadth*,
Imhausen : *E* pw m Aw n *P* m wsx, *Es sind E als Länge zu P als Breite*,
Michel : *E* pw m Aw n P sxw, *C'est E qui est égal à la « longueur » et (?) qui est égal à la largeur.*
C'est *E* en « longueur », pour *P* en « largeur ». C'est *E* en « longueur », par *P* en « largeur ».

gém.èk néfèr { gm.k nfr}

M17₉,
Gunn, Peet: *You will find (it) right,*
Struve : *Du hast richtig gefunden,*
Neugebauer: *Du hast richtig gefunden,*
Reineke : *Du hast gut gefunden,*
Couchoud : gm.k nfr, *Tu as trouvé juste,*
Clagett : *You will find [it to be]correct,*
Imhausen : gmj.k nfr, *Was von dir gefunden wurde, ist richtig,*
Michel : gm.k nfr, *Tu as bien trouvé !*
L'expression *gém.èk néfèr* (gm.k nfr) est écrite à la fin de presque tous les problèmes du *Papyrus de Moscou*. Le scribe a bien trouvé la solution du problème qu'il devait résoudre.
Tu as bien trouvé.

hayt { Hajj.t }

L_{12}.
Griffith : *hayt* (?), *I do not know what is meant by hayt*,
Schack-Schackenburg : *Rechteck*,
Gillain : *hayt* (?),
Gillings :*hayt* (?),
Reineke : *Lage*,
Couchoud : Hajjt *rectangle*,
Clagett : *rectangles* (*hayt*),
Imhausen : *Rechteck*,
Imhausen, Ritter : Hajj.t.f *its rectangles*,
Michel : Hajjt, *quadrilatère, rectangle* (p. 220).
Le terme *hayt* (Hajj.t) figure dans le *Papyrus de Berlin 6619* et dans le *Fragment UC 32162-1 d'El-Lahoun*. Comme l'a fait remarquer S. Couchoud, avec le déterminatif de l'étoffe frangée (S28 de la classification de Gardiner) il est associé au bandage, au pansement. Dans les problèmes concernés, le déterminatif est plus abstrait (rouleau de papyrus et traits du pluriel). Il peut alors indiquer une **bande rectangulaire** qui peut être un champ surtout quand il mesure 40 coudées de long et 3 coudées de large alors qu'un rectangle est plus souvent nommé *ifèd* (jfd). Nous savons que certaines unités de superficie concernent des bandes : *coudée de terre* (bande rectangulaire de 100 *coudées* par 1 *coudée*) et *millier de terre* (mille *coudées de terre* soit une bande rectangulaire de 1000 *coudées* par 100 *coudées*). Si une *coudée de terre* représente la superficie d'un carré de 10 *coudées* de côté, le *millier de terre* ne peut être associé à un carré dont la mesure du côté est un nombre rationnel de *coudées* : c'est véritablement une bande.

hèr { Hr }

Voir **hèr aou**, **iou.èf hèr (ou)zékhou**.
$M17_{3,\ 8}$.
Gunn, Peet : *on,*
Struve : *auf,*
Neugebauer: *auf,*
Reineke : *auf,*
Couchoud : *à,*
Clagett : *on*,
Imhausen : *auf, die,*
Michel : *la.*
Pour la préposition-conjonction *hèr* (Hr) nous avons distingué diverses acceptions selon qu'elle indique un contexte additif (voir *hèr*$_1$: sur, *hèr*$_2$ et *hèr*$_6$: avec), la cause dans le sens de la donnée d'une dimension (voir *hèr*$_3$: pour), l'équivalence (voir *hèr*$_4$: pour) ou la provenance (voir *hèr*$_5$: en).

hèr aou { Hr Aw}

Voir **ir dit.èk hèr aou**.
$M17_3$.
Gunn, Peet : *on the length*,
Struve : *auf die Lânge*,
Neugebauer: *auf die Länge*,
Reineke : *auf die Lânge*,
Couchoud : *à la longueur*,
Clagett : *on the length,*

Imhausen : *auf die Länge*,
Michel : *la longueur*.
Sur la « longueur ». Pour la « hauteur ».

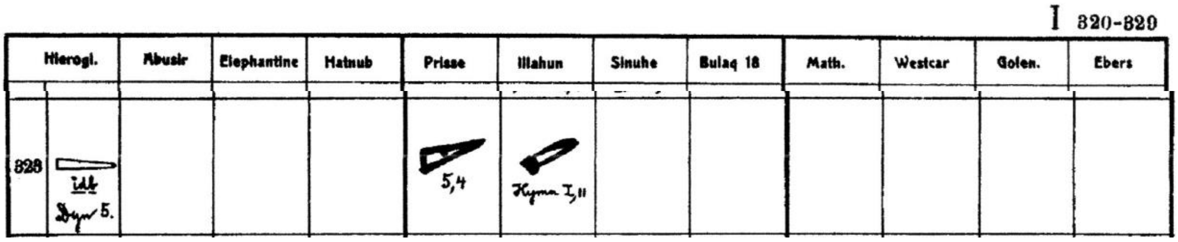
hèr (ou)zékhou { Hr (w)zxw }
Voir **didi.k 3’ 15’ iou.èf hèr (ou)zékhou**.
M17$_{3, 8}$.
Gunn, Peet: *on the breadth,*
Struve : *auf der Breite,*
Neugebauer: *auf der Breite,*
Reineke : *auf der Breite,*
Couchoud : *à la largeur*, pas traduit,
Clagett : *on the breadth*,
Imhausen : *die Breite, auf der Breite,*
Michel : *la largeur.*
Sur la « largeur ». Pour la « base ».

hésèb { Hsb}
Voir **tèp hésèb èn zépou nou zéchou**.

.i { .j }
Voir **mèk 4 pou hèr (ou)zékhou.i**

idèb {jdb}

M7$_{2}$.
Gunn, Peet: *“bank”,*
Struve; der jdb-*Verhältmisses von*
Neugebauer: *jdb*,
Reineke : jdb- Verhältnis, *Ufer*, *Seite*,
Couchoud: (relation entre les deux) côtés,
Clagett: *„bank“ (*jdb*, i.e., the ratio of height to base),*
Imhausen: *der* jdb*-Verhältnisses zu,*
Michel : p. 533, jdb, *la rive, la berge; [math]le rapport, la relation.*
Dans les textes mathématiques égyptiens, le terme ***idèb* (jdb)** figure seulement dans le problème M7 du *Papyrus de Moscou*. Les commentateurs hésitent à le rendre par une de ses acceptions usuelles, à savoir, « rive », « berge » ou par son emploi comme « rapport » ou « relation » entre les dimensions d’un rectangle ou d’un triangle. *A priori*, ces deux types de traduction s’excluent mutuellement. Toutefois, il nous semble que nous devons examiner en détail l’écriture de ce mot. Le scribe trace les « lettres » j, d et b et le déterminatif d’une portion de terre irriguée (N23 dans la classification de Gardiner). Or, nous savons que ce signe est une variante de la marque de la langue de terre oblique (N21 de la même classification) que le scribe utilise comme déterminatif du terme désignant un triangle. Par ailleurs, à la V^{e} dynastie, l’écriture hiéroglyphique du N21 se présente sous la forme d’un triangle rectangle aplati (voir Möller, n°323) : la langue de terre est en pente.



Il se peut donc que les scribes aient repris l'acception première des terrains en pente nommés *ibèd* (jbd) pour l'utiliser dans le contexte des triangles et, plus précisément, des triangles rectangles. Autrement dit, nous sommes dans une situation semblable à celle que nous avons trouvée dans le cas des pyramides : le *séqèd* (sqd), comme l'***ibèd*** (jbd) est un nombre exprimant leur pente. Dans les deux cas, nous avons conservé le terme égyptien lors de notre traduction, mais dans nos adaptations ou commentaires nous parlons du *quotient-de-proportion* ou du *nombre-de-fois* caractérisant le « rapport » ou la « relation » entre les dimensions. Il semble que, comme en M7, ce terme particulier soit réservé au quotient de la plus grande dimension par la plus petite, c'est-à-dire, puisque nous pensons qu'il s'agit d'un triangle rectangle, du plus grand côté de l'angle droit par le plus petit côté de l'angle droit. Un peu comme si, aujourd'hui, il pouvait se présenter en termes de ligne trigonométrique du plus grand angle aigu du triangle rectangle.

idèb èn 2 1/2 { jdb n 2 1/2}

M7$_2$.
Gunn, Peet: *the „bank" of 2 1/2*,
Struve : *der jdb- Verhältmisses von 2 1/2*,
Neugebauer : *ein jdb von 2 1/2*,
Reineke : *von einem* jdb-*Verhältnis von 2 1/2*,
Couchoud : *(d'une relation entre les deux) côtés de 2 1/2*,
Clagett : *„bank" (jdb, i.e., the ratio of height to base) of 2 1/2"*,
Imhausen : jdb n 2 2', *der jdb-Verhältnisses zu 2 2'*,
Michel : jdb n(jj) 2 2', *un rapport de 2 ½*.
D'*idèb* 2 2'. De *quotient-de-proportion* 2 1/2 .

iou.èf hèr (ou)zékhou { jw.f Hr (w)zxw }

Voir **didi.k 3' 15' iou.èf hèr (ou)zékhou**.
M17$_3$.
Gunn, Peet: jrjj Hr (w)zxw, *thereof on the breadth,*
Struve : jw.f Hr zxw, *es ist auf der Breite,*
Neugebauer: (xr sx.w), *auf die Breite*,
Reineke : jw.f Hr zxw, *es ist die Breite, ist es auf der Breite*,
Couchoud : jrjj Hr (w)sxw, *à la largeur,*
Clagett : jw.f Hr (w)zxw, *therefore on its breadth*,
Imhausen : jw.f Hr zxw, *und) es ist die Breite,*
Michel : jw.f Hr zxw, *pour ce qui est la largeur,*
Qui est sur la « largeur ». Pour ce qui est la base.

ir.khér.èk *E'* èn *F* { jr.xr.k *E'* n *F* }

L$_{5, 10}$.
Griffith : *Make thou E' of F,*
Schack-Schackenburg : *Nimm E' von F*,

Gillain : *Fais E' de F,*
Gillings : *Make thou E' of F,*
Reineke : *Du sollst machen E' von F,*
Couchoud : *Tu diviseras par E' les R, Tu prendras E' de F,*
Clagett : *Take E' of F,*
Imhausen : *Dann berechnest du E' von diesen F, Dann berechnest du E von F,*
Imhausen, Ritter : *You shall calculate E' of F,*
Michel : *Alors tu fais en sorte de calculer E' de F.*
Par deux fois, avec les expressions numériques 1/2 et 1/2 1/4, qui sont fractionnaires et plus petites que 1, le scribe change la formulation relative à une multiplication par cette expression : il ne peut parler de « fois » comme lorsque nous disons « tu feras la moitié de 4 ». **Tu feras *E'* de *F***.

ir.khér.èk ir.èk { jr.xr.k jr.k }

Voir : **ir.khér.èk ir.èk *E* èr gémèt ouâ**, **ir.khér.èk ir.èk *E* èr gémèt 1, ir.khér.èk ir.èk qénébét.ès**, **ir.khér.èk ir.èk 3' 15' èn 10**.
M63, 5, M17 5, 6 (2), 7.
Gunn, Peet: *You are to treat, you are to calculate*, *You are to take*,
Struve: *Berechne du*, *Rechne du mit*,
Vogel : *dividiere (1) durch*, *Berechne*,
Neugebauer: *Berechne*, *Rechne du*,
Reineke : *Dann sollst du machen*, *Du sollst du … machen*, *Du sollst machen*,
Gillings : *Calculate thou*,
Couchoud : ir xr.k jr.k, *alors calcule, Tu feras une multiplication, Tu prendras, extrait sa racine carrée*, *fais en sorte que*,
Clagett : *Calculate*, *You are to take*, *Reckon with*,
Imhausen : ir xr.k, ir xr.k jrj.k, *Dann dividierst du*, *Dann berechnest du*, *Du berechnest du*
Michel :jr.xr.k jr.k, *alors tu fais en sorte de calculer, alors tu fais en sorte d'extraire*.
À la simple instruction *ir.khér.èk* (jr.xr.k), le scribe ajoute *ir.èk* (jr.k) en tant que substantif ce qui rend la traduction difficile. Nous ne trouvons pas une telle formulation dans le *Papyrus Rhind*. Seule M. Michel distingue ces deux expressions en la traduisant « *alors tu fais en sorte de calculer* ». Littéralement nous préférons « **tu feras ta manière de calculer** » optant, lors de nos adaptations, pour les expressions verbales classiques des opérations : multiplication, division ou extraction de racine carrée.

ir.khér.èk ir.èk *E* èr gémèt ouâ { jr.xr.k jr.k *E* r gm.t wa }

M63.
Gunn, Peet: *You are to treat E so as to find 1,*
Struve : *Berechne du E , um zu finden Eins,*
Vogel : *dividiere 1 durch E,*
Neugebauer: *Berechne du E um zu finden Eins,*
Gillings : *Calculate E until you get 1,*
Reineke : *Dann sollst du machen E, um zu finden 1,*
Gillings: *Calculate E until you get 1,*
Couchoud : jr.xr.k jr.k *E* r gm.t wa, *Alors calcule E pour obtenir 1,*
Clagett : *Calculate E to get 1*,
Imhausen : jr.xr.k *E* r gm.t wa, *Dann dividierst du 1 durch E*,
Michel : jr.xr.k jr.k *E* r gm.t wa, *Alors tu fais en sorte de calculer E pour trouver 1*.
Tu feras ta manière de calculer, *E* jusqu'à trouver un. Tu diviseras 1 par *E*.

ir.khér.èk ir.èk *E* èr gémèt 1 { jr.xr.k jr.k *E* r gm.t 1}

M17₄.
Gunn, Peet: *You are to treat E so as to find 1*,
Struve : *Rechne du mit E um zu finden 1*,
Reineke : *Du sollst machen E, um zu finden 1*,
Couchoud : *Tu feras une multiplication de E pour trouver 1*,
Clagett : *Reckon with E so as to find 1*,
Imhausen : *Dann dividierst du 1 durch E*,
Michel : *Alors tu fais en sorte de calculer E pour trouver 1*.
Tu feras ta manière de calculer, *E* jusqu'à trouver un. Tu diviseras 1 par *E*.

ir.khér.èk ir.èk qénébèt { jr.xr.k jr.k qnb.t}

Voir aussi **ir.khér.èk ir.èk qénébét.ès**.
M6₅.
Gunn, Peet: *you are to calculate its square root*,
Struve: *Berechne du seinen Winkel (Quadratwurzel)*,
Vogel : *Berechne seinen Winkel*,
Neugebauer: *Berechne du seine Winkel (Quadratwurzel)*,
Reineke : *Du sollst machen die Quadratwurtzel*,
Gillings : *Calculate thou its angle (square root 16)*,
Couchoud : jr xr.k jr.k qnbt, *extrais sa racine carrée*,
Clagett : *Calculate its square root*,
Imhausen : jr xr.k jr.k qnb.t.f, *Dann berechnest Du seine Wurzel*,
Michel :jr.[xr].k jr.k qnbt, *Alors tu fais en sorte d'extraire sa racine carrée*.
Gunn et Peet voient le signe de la vipère sous la marque de la racine carrée. A Imhausen, le retient dans sa traduction mais pas dans sa transcription hiéroglyphique. Au début, le haut de l'expression manque, ce qui ne nuit pas à la restauration. Littéralement nous avons « tu feras, la manière de calculer, le coin » que nous rendons par **tu feras ta manière de calculer le « coin »** mais nous revenons au classique tu extrairas la racine carrée lors de l'adaptation.

ir.khér.èk ir.èk qénébét.ès{ jr.xr.k jr.k qnb.t.s}

M17₆.
Gunn, Peet: *you are to calculate its square root*,
Struve: *Berechne du seinen Winkel (Quadratwurzel)*,
Vogel : *Berechne seinen Winkel*,
Neugebauer: *Berechne du seinen Winkel*,
Reineke : *Du sollst machen seine Quadratwurtzel* (M17₆),
Gillings : *Calculate thou its angle (square root 16)*,
Couchoud : ir xr.k jr.k qnb.t.s, *tu en prendras la racine carrée*,
Clagett : *You are to take its square root*,
Imhausen : ir xr.k jr.k qnb.t.s, *Dann berechnest Du seine Wurzel*,
Michel :jr.[xr].k jr.k qnbt.s, *Alors tu fais en sorte de calculer sa racine carrée*.
Tu feras ta manière de calculer son « coin » mais nous revenons au classique tu extrairas sa racine carrée lors de l'adaptation.

ir.khér.èk ir.èk *E* èn 10 { jr.xr.k jr.k *E* n 10 }

M17₇.
Gnn, Peet: *You are to take E of 10*,

Struve: *Berechne du E von 10*,
Reineke: *Du sollst machen E von 10*,
Couchoud: *Tu prendras E de 10*,
Clagett: *you are to take E of 10*,
Imhausen: *Dann berechnest du E von 10*,
Michel: *Alors tu fais en sorte de calculer E de 10*.
Tu feras ta manière de calculer, 3' 15' de 10. Tu multiplieras 10 par 1/3 1/15.

ir.khér.èk pa *E* { jr.xr.k pA *E* }

Voir **ir.khér.èk pa *E* èr gémèt ouâ**, **ir.khér.èk pa *E* zèp *F***.
L4, 7, 8.
Griffith : *Make thou that E, Make thou E,*
Schack-Schackenburg : *Dividiere E*, *Multipliziere die E*,
Gillain : *fais ce E, Multiplie ce E,*
Gillings : *Make thou that E, Make thou E,*
Reineke : *Du sollst machen dieses E,*
Couchoud : *Tu feras le produit de ce E, Tu multiplieras E,*
Clagett : *Take E, Calculate with E,*
Imhausen : *Dann berechnest du diese E, Dann [dividierst] du E,*
Imhausen, Ritter : *You shall multiply this E, You shall divide by this **E***.
Michel : *Alors tu fais en sorte de calculer ce E, Alors tu fais en sorte de calculer (avec) ce E.*
Cette expression est utilisée pour formuler une instruction. Nous avons la forme verbale *sédjém.khér.èf* (sDm.xr.f) qui donne lieu à diverses acceptions de traduction. Ici, les commentateurs ont choisi le présent, le futur ou l'impératif. Pour notre part, nous avons préféré le futur qui a une signification moins obligatoire que l'impératif. Ceci est d'autant plus nécessaire que la procédure employée est maladroite. Quant au verbe *iri* (jrj) nombreux ont retenu son sens habituel, à savoir, « faire » mais certains mettent l'accent sur le calcul ou sont proches de l'adaptation qui consiste à spécifier l'opération à accomplir. Enfin, le texte étant écrit au Moyen Empire, nous avons conservé le démonstratif pour rendre le terme *pa* (pA). **Tu feras ce *E***. Lors de l'adaptation nous pouvons choisir l'opération classique.

ir.khér.èk pa *E* èr gémèt ouâ { jr.xr.k pA *E* r gm.t wa }

L7.
Griffith : *Make thou E to find 1,*
Schack-Schackenburg : *Dividiere 1 durch ¾,*
Gillain : *Multiplie ce E pour trouver 1,*
Gillings : *Make thou E to find 1, (Divide 1 byE,*
Reineke : *du sollst machen diese E, um zu finden 1,*
Couchoud : *Tu multiplieras E pour en trouver 1,*
Clagett : *Calculate with E to find 1,*
Imhausen: *Dann [dividierst] du eins durch diese E,*
Imhausen, Ritter : *You shall divide 1 by this E,*
Michel : *Alors tu fais en sorte de calculer (avec) ce E pour trouver 1.*
D'un point de vue opérationnel, le scribe demande de calculer l'inverse d'une expression numérique. Il emploie à cette occasion l'écriture littérale du chiffre 1 qui peut désigner aussi l'unité. Nous avons simplement retenu « un » et la division pour l'adaptation.
Tu feras ce *E* jusqu'à trouver un.
Tu diviseras 1 par *E*.

ir.khér.èk pa *E* zèp *F* { jr.xr.k pA *E* zp *F* }

L4.
Griffith : *Make thou that E, F times,*
Schack-Schackenburg : *Multipliziere die E mit F,*
Gillain : *fais ce E, F fois,*
Gillings : *Make thou that E,F times,*
Reineke : *Du sollst machen dieses E F mal,*
Couchoud : *Tu feras le produit de ce E par F, Tu feras le produit de E par F,*
Clagett : *Take E, F times,*
Imhausen : *Dann berechnest du diese E, mal F,*
Imhausen, Ritter : *You shall multiply this E by F,*
Michel : *Alors tu fais en sorte de calculer ce E, F fois.*
Tu feras ce *E*, *F* fois.
Tu multiplieras *E* par *F*.

ir.khér.èk qab.èk ahèt { jr.xr.k qAb.k AH.t }

M73.
Gunn, Peet: *You are to double the area,*
Struve : *Verdoppele du die Fläche,*
Neugebauer: *Verdoppele die Fläche*,
Reineke : *Dann sollst du verdoppeln die Fläche,*
Couchoud : jr.xr.k qb.k, *tu feras en sorte de doubler, tu doubleras,*
Clagett : *Double the area*,
Imhausen : jrj.xr.k qA.k, *Dann verdoppelst du die Fläche*,
Michel : jr. xr.k qAb[.k], *Alors tu fais en sorte de double l'aire.*
Tu fe<ras> ton dou<blement> de la superficie. Tu doubleras la superficie.

ir.khér.èk qab.èk 2000{ jr.xr.k qAb.k 2000}

M174.
Gunn, Peet : *You are to double the 2 thousands*,
Struve : *Verdoppele du 20 (Quadrat-*xt),
Reineke : *Du sollst verdoppeln 20*,
Couchoud : jr.xr.k qAb.k 2000, *Tu doubleras les 2000 (coudées)*,
Clagett : *Double the the 20 [setjat]*,
Imhausen : jrj.xr.k qAb.k 20, *Dann verdoppelst du 20,*
Michel : jr.xr.k qAb.k 2000, *Alors tu fais en sorte de doubler 2000 (coudées de terre)*.
Tu feras ton doublement de 2000. Tu doubleras 2000 (*coudées de terre*).

ir.khér.ék qénébét.èf èm 4 { jr.xr.k qnb.t.f m 4 }

L10.
Griffith : *Make thou the corner (square root) as 4,*
Schack-Schackenburg : *Nimm die Quadratwurzel=4, (das ist die Länge der einen Seite)*,
Gillain : *Fais la racine carrée 4,*
Gillings : *Make thou a corner (square root) as 4,(Find the square root of 16. It is 4, the front),*
Reineke : *Du sollst machen die (Quadratwurzel) als* 4,
Couchoud : jr.xr.k qnbt m 4,*Tu extrairas la racine carrée qui est 4,*
Clagett : *Take the square root [of it], which is 4,*
Imhausen (Algorithmen) : *Dann berechnest du seine Wurzel als* **4,**
Imhausen, Ritter : jr.xr.k qnb.t.f m 4, *You shall calculate its root as* **4,**
Michel : jr.xr.k qnbt.f m 4, *Alors tu fais en sorte de calculer sa racine carrée, égale à* 4.

Tu feras son « coin » : 4. Tu extrairas sa racine carrée : 4.

ir èn 10 { jr n 10 }

M7$_5$.
Gunn, Peet: *Apply this to 10*,
Struve : *Berechne du <P> von 10*,
Neugebauer: *Berechne du < 1/3 1/15> von 10*,
Reineke : *Es möge gemacht werden von 10*,
Couchoud : *Ceci, multiplié par 10*,
Clagett : *Apply this to 10*,
Imhausen : jrj n *E*, *Berechne zu 10*,
Michel : *Multiplie-le par 10*.
À propos d'une multiplication, en M7, le scribe formule une instruction particulière *ir èn 10* (jr n 10) qui donne lieu à deux interprétations selon le rôle que l'on fait jouer au nombre 10, multiplicande ou multiplicateur. Les premiers commentateurs penchent pour la première interprétation tandis que les derniers choisissent la seconde. Le scribe vient d'obtenir le résultat d'une opération, à savoir,1/3 1/15, et, peut-être, par une réduction d'expression, il ne formule pas de manière classique la multiplication.
Toutefois, nous devons prendre en compte le fait que les deux termes du produit sont de nature différente, fractionnaire pour 1/3 1/15 et entière pour 10. Or, de manière générale, la multiplication d'un nombre fractionnaire par un nombre entier nécessite la connaissance des doubles de nombreux quantièmes tandis que la multiplication d'un nombre entier par un nombre fractionnaire peut seulement requérir de diviser cet entier par les inverses des divers quantièmes figurant dans l'expression fractionnaire autrement dit, d'opérer avec des nombres entiers. Soucieux d'un certain Art du calcul, ceci n'a sans doute pas échappé aux scribes égyptiens d'où une formulation particulière pour demander de multiplier 10 par 1/3 1/15. Quant à la traduction, nous avons suivi l'expression littérale « **fais à 10** » et pour l'adaptation nous insistons sur la multiplication en proposant « à 10, multiplie » comme lorsque nous disons « à 10, ajoute » pour signifier, ici, que 10 est multiplié par 1/3 1/15, le résultat précédemment trouvé.

ir zèp 2 2' { jr zp 2 2' }

M7$_3$.
Gunn, Peet: *Take (it) 2 1/2 times*,
Struve : *Rechne 2 1/2 mal*,
Neugebauer : *Rechne 2 ½ mal*,
Reineke : *Es möge 2 1/2 mal gemacht werden*,
Couchoud : jr sp 2 1/2, *que tu dois multiplier par 2 1/2*,
Clagett : *Take it 2 1/2 times*,
Imhausen : jrj zp 2 1/2, *Rechne mal 2 1/2*,
Michel : jr sp 2 1/2, *multiplie par 2 1/2 fois*.
Fais 2 2' fois. Multiplie par 2 1/2.

i<r 12> pèn { j<r 12> pn}

M6$_4$.
Gunn, Peet : [jr.k 12] pn, *[You are to take] this [12]*,
Struve : jr 12 pn, *Rechne mit dieser [12]*,
Vogel: *multipliziere 12*,
Neugebauer: *Rechne mit dieser [12]*,
Gillings : *Make thou that 12*, *Reckon with these 12*,

Reineke : jr [12] pn, *Es werde gemacht diese 12*,
Couchoud : jr 12 pn, *Multiplie ce 12*,
Clagett : *Take this 12 setjat*,
Imhausen : [jrj 12] pn, *Berechne diese 12*,
Michel : jr. xr [12] pn, *alors tu calcules ce [12]*.
Le début de cette instruction est lacunaire. Ceci laisse la place à diverses restitutions. Pourtant, le propos est clair. Le scribe invite à multiplier la mesure 12 qu'il aurait dû donner de la superficie du rectangle par le nombre 1 1/3 qu'il vient de trouver. Or, avant le terme *pèn* (pn) nous lisons seulement une marque, en écriture basse, du signe classique de l'œil, le nombre 12 étant absent. Il n'y a pas de place pour d'autres signes. Fort justement, dans leur transcription hiéroglyphique, Struve et A. Imhausen restituent ces seules marques. Nous les avons suivis, ce qui nous conduit à proposer la traduction suivante, **fa<is ce 12>** qui donne lieu à l'adaptation opératoire mul<tiplie ce 12>.

i<r 12> pèn nét<y> èm sététy 1 3' [zèp] { j<r 12> pn nt<jj> m st.tjj 1 1/3 [zp] }

M64.
Gunn, Peet : *[You are to take] this [12]which is in a set and 2* aruae *1 1/3 <times>*,
Neugebauer: *Rechne mit dieser [12], die in der Fläche (*sttj*) ist*,
Struve : *Rechne mit dieser [12] die in der Fläche (śttj) ist, 1 1/3 < Mal>*,
Reineke : *Es werde gemacht diese 12 die in der Fläche sind, 1 1/3 [Mal]*,
Gillings : *Reckon with these 12, 1 1/3 times*,
Couchoud : jr 12 pn ntt m sttjj 1 1/3, *Multiplie ce 12 de la surface avec 1 1/3*,
Clagett : *Take this 12 setjat 1 1/3 times*,
Imhausen : [jrj 12] pn ntj m sTA.t 2 < r zp> 1 1/3, *Berechne diese 12 mal 1 1/3 !*
Michel : jr.xr [12] pn nt[t] m sttjj, 1 1/3, *alors tu calcules ce [12] qui est égal à l'aire, (avec) 1 1/3.*
Fa<is> ce <12> qui est la superficie, 1 1/3 [fois]. Multiplie ce 12 qui est la superficie par 1 1/3.

ir** { jr }

Voir **ir dit.èk hèr aou**.
M173.
Gunn, Peet: *what*,
Struve : *Das, was,*
Neugebauer: *Das, was,*
Reineke : *Was,*
Neugebauer: *Von dem was*,
Couchoud : jr, *De ce que,*
Clagett : *what,*
Imhausen : jr, *Was,*
Michel : jr, *Si*.
Le terme introduit une situation concomitante que l'on peut traduire par **quant à** et de ce pour l'adaptation. Outre le cas présent cette tournure est encore attestée quatre fois dans le *Papyrus de Moscou*.

ir dit.èk hèr aou { jr dj.t.k Hr Aw }

M173.
Gunn, Peet : *what you put on the length,*
Struve : *Das, was du gibst auf die Länge <ist 1>,*

Neugebauer: *Von dem was du auf die Länge (*Hr Aw*) gibst,*
Reineke : jr dj.t.k Hr Aw, *Was anbetrifft das, du gibst auf die Länge,*
Couchoud : jr djt.k Hr Aw, *De ce que tu mets à la longueur,*
Clagett : *what you put on the length,*
Imhausen : jr dj.t.k Hr Aw, *Was betrifft das, was du auf die Länge gibst,*
Michel : jr dj<t>.k Hr Aw, *Si tu donnes la longueur.*
Quant à ce que tu donnes sur la « longueur », De ce que tu mets pour la hauteur.
On a affaire à une forme de participe substantivé qu'il est difficile de traduire de l'égyptien dans nos langues d'une manière littérale. Mot à mot cela donnerait quelque chose comme :" quant à, ton "donné", et par extension:" quant à ce que tu donnes". En quelque sorte nous avons suivi les transcription et traduction proposées par la plupart des commentateurs.

ir dit.èk hèr aou di.én.èk 3' 15' iou.èf hèr (ou)zékhou { jr dj.t.k Hr Aw dj.n.k 3' 15' jw.f Hr (w)zxw }

M17$_3$.
Gunn, Peet : *what you put on the length, you must put 2/5 thereof on the breath,*
Struve : *Das, was du gibst auf die Länge <ist 1> (und) du gibst (noch) 1/3 1/15, es ist auf der Breite,*
Neugebauer: *Von dem was du auf die Länge (*Hr Aw*) gibs, gibst du 3'+15' auf der Breite (* Hr sx.w*),*
Reineke : *Was anbetrifft das, du gibst auf die Länge, wenn du gegeben hast 1/3 1/15 (davon, so) ist es auf der Breite,*
Couchoud : jr djt.k Hr Aw dd.k 3' 15' jrjj Hr (w)sxw, *De ce que tu mets à la longueur tu dois mettre 1/3 1/15 à la largeur,*
Clagett : *what you put on the length, you must put 1/3 1/15 (i.e., 2/5) therefore on its breadth",*
Imhausen : jr dj.t.k Hr Aw dj.n.k 3' 15' jw.f Hr wsx, *Was betrifft das, was du auf die Länge gibst, du hast 3' 15' veranlaßt (und) es ist die Breite,*
Michel : jr dj<t>.k Hr Aw dj(w) n.k 3' 15' jw.f Hr sxw, *Si tu donnes la longueur et que l'on te donne 1/3 1/15 pour ce qui est la largeur.*
De ce que tu mets à la « longueur », tu dois (en) mettre 3' 15' à la « largeur ».
De ce que tu mets pour la hauteur, tu dois (en) mettre 1/3 1/15 pour ce qui est la base.

khénèt { xnt }

Voir **nis ouâ khénèt *E***.

khépér.khèr 4 èn aou 1/2 1/4 èm 3 èn ouzékhou { xpr.xr 4 n Aw 1/2 1/4 m 3 n wzxw }

M6$_5$.
Gunn, Peet : *result 4- for the length, and the breadth has ¾ of it, namely 3*,
Struve : *Es entsteht 4 für die Länge. Sein ½ ¼ für die Breite*,
Vogel : *es gibt 4, für die Länge, sein 2' 4' als 3 für die Breite*,
Neugebauer: *Es entsteht 4 für die Länge. Sein ½ ¼ als die Breite*,
Reineke : *es ergibt 4 für seine Länge ½ ¼ als 3 für die Breite*,
Couchoud : xpr.xr 4 n Aw ½ ¼ m 3 n swx jrt mj xpr, *ceci donne 4 pour la longueur, dont 1/2 et 1/4 donne 3 pour la largeur*,
Clagett : *The result is 4 for ist length, [and] ½ ¼ o fit 3 for the breath*,
Imhausen : xpr xr 4 n Aw ½ ¼ m 3 n wsx, *Dann resultiert 4 für die Länge. ½ ¼ ist 3 für die Breite*,

Michel : xpr.xr 4 n Aw ½ ¼ m 3 n sxw, *il advient 4 pour la longueur, (ses) ½ ¼ égaux à 3 pour la longueur*.
Seuls Gunn et Peet voient le signe de la vipère après 1/2 1/4, marque absente du papyrus à cet endroit. Ceci n'empêche pas certains commentateurs de l'introduire dans leur traduction. Nous proposons **Il adviendra 4 pour la longueur. 2' 4' : 3, pour la largeur**. Mais nous retenons ce possessif lors de notre adaptation il en résultera 4 pour la longueur. Son 1/2 1/4 : 3, pour la largeur.

khépér.khèr zèp *2 2'* { xpr.xr zp *2 2'* }

M17₅.
Gunn, Peet : *result 2 ½ times*,
Struve : *Es entsteht 2 1/2 mal*,
Reineke : *es ergibt 2 ½ Mal*,
Couchoud : *Le résultat est 2 ½ fois*,
Clagett : *The result is 2 ½ times*,
Imhausen : *Dann resultiert 2 ½ mal*,
Michel : *il advient fois 2 ½*.
Il adviendra 2 2' fois. Il en résultera 2 1/2.

khépérèt im pou *E* { xpr.t jm pw *E* }

Voir **khépérèt im pou zèp *E***, **khépérèt im pou hayt.èf 10 nèt méh 4 èr 3**.
UC 32134$_{3, 4, 5}$, UC 32162-1$_{5, 6, 8, 9, 11, 12}$, UC 32162-2$_{10, 11}$, M7$_{5}$.
Griffith : *the result thereof is E,*
Schack-Schackenburg : *das giebt E*,
Gunn, Peet: *what results is E*,
Gillain : *le résultat de ceci est E, le résultat est E,*
Struve : *Das, was [da] entsteht [ist] E*,
Gillings : *The result thereof is E*,
Reineke : *Das, was daraus entsteht, ist E,*
Couchoud : xprt jm pw *E* : *Ce qu'il en advient est E, Il advient de cela E ; Il en advient E ; Le résultat est E* ;
Clagett : *The result is E, The result thereof is E,*
Imhausen : xpr.t jm pw *E* ; *Das, was daraus resultiert ist E,: Das, was resultiert, ist E,*
Imhausen, Ritter : *That which shall result is E;That shall result is E;*
Michel: xpr.t jm pw : *E*, *ce qu'il en advient est E, le résultat de cela est E.*
Le scribe emploie cette expression pour indiquer le résultat d'une opération. Cette phrase figure deux fois dans le *Papyrus Rhind* et onze fois dans les *Fragments de Kahun*. Elle donne lieu à un certain embarras. Les grammairiens citent xpr.t ou xprt avec des points de vue différents. De Buck (§ 93) traduit xpr.t par *ce qui est advenu* ou *ce qui adviendra* à propos des participes employés substantivement. Lefebvre (§ 427) souligne que les idées neutres sont souvent exprimées par un participe féminin auquel on peut ajouter le déterminatif du pluriel et dans ce cadre il traduit xprt par *ce qui est arrivé*. Enfin, Gardiner (§ 354) met en avant les marques du pluriel pour rendre xpr.t par *that which has happened*. Ici les barres du pluriel sont absentes et nous devons choisir entre deux verbes : apparaître ou advenir. Seul ce dernier a été retenu par De Buck et à un degré moindre par Gardiner. Il semble que ce soit ici le bon choix car nous devons nous situer dans le cadre d'un résultat et alors nous devons considérer le verbe advenir. Quel temps choisir ? Poursuivant une certaine pratique, nous avons adopté le futur, comme nous y invite De Buck. Enfin, *khépér.èt* n'est pas seul, l'Auteur lui a adjoint *im pou* (jm pw). Nous étions habitués à trouver comme expression d'un résultat intermédiaire la forme *khépér$_{1}$.khér.èk*. Dans le *Papyrus Rhind*, il s'agit du résultat final et

l'Auteur change sa formulation. Nous pouvons ici aussi hésiter sur le rôle que nous attribuons à *pou*. Est-ce l'auxiliaire qui est en jeu et alors une traduction du genre suivant *de là, c'est ce qui adviendra, N* peut convenir. Ou bien, prenons-nous en compte le caractère démonstratif, et sortant des sentiers battus nous pouvons proposer *de là ce qui adviendra, ces N*. Pour terminer n'oublions pas aussi le point précédant le nombre *N* que nous pouvons ne pas traduire ou rendre par deux points. Tout ceci constitue un large éventail de possibilités dans lequel se sont engouffrés nos prédécesseurs. Pouvons-nous aisément justifier nos choix ? Comme souvent ce n'est pas sûr. Nous adoptons **De là, ce qu'il adviendra, c'est *E***. Il en résultera : *E*.

khépérèt im pou hayt.èf 10 nèt méh 4 èr 3 { xpr.t jm pw Hajj.t.f 10 n.t mH 4 r 3 }

L12.
Griffith : *The result thereof is hayt (?)10 of 4 cubits : 3,*
Gillain : *Le résultat est 10 hayt (?) de 4 coudées : 3,*
Gillings : *The result thereof is hayt (?) 10 of 4 cubits : 3,(The result thereof is (hayt (?) 10 of) 4 cubits : 3 cubits,*
Reineke : *Das, was daraus entsteht, sind 10 Lagen von 4 zu 3 Ellen,*
Couchoud : xprt jm pw Hajjt 10 nt mH 4 r 3, *Il advient donc 10 rectangles de 4 coudées sur 3.*
Clagett : *The result is 10 rectangles (*hayt*) of 4 cubits by 3.*
Imhausen (Algorithmen) : *Das, was resultiert, ist ein Rechteck von **10** zu **4** Ellen auf **3** (Ellen).*
Imhausen, Ritter : xpr.t jm pA Hajj.t.f 10 n.t mH 4 r 3, *That which shall result is **10** of its rectangles of **4** cubits by **3** cubits,*
Michel : xprt jm pA Hajjt 10 n(y)t mH 4 r 3, *Le résultat de cela est 10 quadrilatères de 4 coudées sur 3.*
De là, qu'il adviendra, ce sont ses10 *hayt* (bandes ? rectangles ?) de 4 coudées par 3.
Il en résultera : 10 rectangles de 4 coudées par 3.

khépérèt im pou zèp *E* { xpr.t jm pw zp *E* }

L8.
Griffith : *the result thereof is E times,*
Gillain : *le résultat est E fois,*
Gillings : *The result thereof is E times,*
Reineke : *Das was daraus ensteht, ist E Mal,*
Couchoud : *Il advient de cela E fois,*
Clagett : *The result thereof is E,*
Imhausen *Das, was resultiert, sind E Male,*
Imhausen, Ritter : *That which shall result is E times,*
Michel *: le résultat de cela est fois E.*
De là, c'est ce qui adviendra : *E* fois. Il en résultera : *E* fois.

mèk 10 pou èm aou { mk 10 pw m Aw}

M177.
Gunn, Peet: *See, it is 10 (khet) in length*,
Struve : *Siehe: es ist 10 auf der Länge*,
Neugebauer: *Siehe: es ist 10 auf der Länge*,
Reineke : *Siehe, 10, sind es an der Länge*,
Couchoud : *Vois, la longueur est 10*,
Clagett : *Behold it is 10 [khet] in length*,

Imhausen : *Siehe, es ist 10 als Länge*,
Michel : *Vois, 10 (*khet*) c'est la longueur*.
mèk (mk) est très présent dans le *Papyrus de Moscou*. On y recense quinze occurrences.
Vois ! C'est 10 en « longueur ». Vois ! C'est10 en hauteur.

mèk 4 pou hèr (ou)zékhou.i { mk 4 pw Hr (w)zxw.j }

M17₈.
Gunn, Peet: *See, it is 4 (khet) on the breadth*,
Struve : *Siehe : es ist 4 auf der Breite*,
Reineke : *Siehe 4 sind es an der Breite*,
Couchoud :*Vois, ce 4 est ma largeur*,
Clagett : *Behold, it is 4 [khet] on the breadth*,
Imhausen : *Siehe, es ist 4 auf der Breite*,
Michel : *Vois, 4 (*khet*) c'est pour la largeur.*
Vois ! C'est 4 pour la « largeur ». Vois ! C'est 4, pour la base !
Le dernier signe écrit à la fin de la huitième ligne est celui de l'homme assis (A2 dans la classification de Gardiner). Tous les commentateurs le retiennent dans leur transcription hiéroglyphique mais la plupart ne lui accordent aucune importance, tant lors de leur transcription savante que dans leur traduction. Gunn et Peet[144] parlent d'un déterminatif lié à une dimension. On le retrouve dans le M14 à la ligne 2. Nous avons suivi Sylvia Couchoud[145] qui considère cette marque comme signifiant un suffixe. Ce peut être le ô vocatif.

mi { mj }

M6₆.
Rhind : *comme*,
Gunn, Peet: non traduit : *the correct procedure*,
Struve: *(eigentliche)*,
Neugebauer: *(eigentliche)*,
Reineke : *wie*,
Couchoud : mj, *comme*,
Clagett : *as follows*,
Imhausen : *wie*,
Michel : mj, *(Voici).*
Telle que.

néfèr { nfr}

M17₉,
Gunn, Peet: *right*,
Struve : *richtig gefunden*,
Neugebauer: *richtig gefunden*,
Reineke : *gut*,
Couchoud : *juste*,
Clagett : *[it to be]correct*,
Imhausen : *ist richtig*,
Michel : *bien !*

144 Gunn, Peet, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, p. 178.
145 Couchoud, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, p. 49.

Pour des raisons peu claires au signe constitué par le cœur et la trachée (F 35 dans la classification de Gardiner) qui donne *néfèr* (nfr) comme correspondant phonétique, sont associées les significations suivantes : beau, bon, parfait et tous leurs dérivés.

néty{ntjj}

M6₄.
Rhind : Pronom relatif déterminatif masculin singulier : *qui*,
Gunn, Peet: *which is in*,
Struve : ntt, *die in*,
Vogel *: mit*,
Neugebauer: *die in*,
Reineke : *die in*,
Couchoud : ntt, *de*,
Clagett : pas traduit,
Imhausen : ntj, pas traduit,
Michel : nt[t], *qui est*.
La fin de l'écriture de ce terme est dans une lacune. Les transcriptions qui en sont proposées reviennent à adopter *nétèt* (ntt) ou *néty* (ntjj). Tous deux sont des pronoms relatifs, le premier, féminin ou pluriel, tandis que le second est masculin. Ici, il se rapporte au nombre 12 pour lequel le scribe vient d'utiliser le démonstratif masculin singulier *pèn* (pn). Par suite, nous avons choisi la dernière transcription qui peut donner lieu à la traduction **qui est**.

nis ouâ khénèt *E* { njs wa xnt *E* }

M7₄,
Gunn, Peet: *Evoke 1 from E*,
Struve : *Diviediere Eins durch E*,
Neugebauer: *Diviediere Eins durch E*,
Reineke : *Es werde geteilt 1 durch E*,
Couchoud : *diviser 1 par E*,
Clagett: *Call up 1 from 2 ½*,
Imhausen : *Dividiere eins durch E,*
Michel : *Divise 1 par E.*
Le verbe apparaît encore deux fois avec le sens de diviser en M13 et M21.
Exprime 1 à partir de *E*. Inverse *E*.

ouzékhou { wzxw }

L'auteur du *Papyrus de Moscou* donne à lire plusieurs écritures de ce terme. En M6, le scribe trace tout d'abord le signe de la coupe (W10 dans la classification de Gardiner) auquel les égyptologues donnent les valeurs phonétiques zxw ou sxw suivi de la « lettre » w et du classique rouleau de papyrus avec les trois barres du pluriel, indiquant, par ce complément, une certaine abstraction. En M7, il fait précéder ces marques de la « lettre » w. Enfin, en M17, l'écriture est plus explicite avec les « lettres » z, x, w, le signe de la coupe et soit le rouleau de papyrus, soit la marque de l'homme. Suivant nos conventions, nous avons opté pour l'écriture complète *ouzékou* (wzxw) qui désigne la largeur d'un rectangle mais aussi la base d'un triangle, d'où notre indexation.

ouzékhou₁ { wzxw₁

M6₂, ₆.
Rhind : *largeur*,

Gunn, Peet: *breadth*,
Struve : *Breite*,
Vogel : *Breite*,
Neugebauer: sx.w*, Breite*,
Reineke : wsx(.t)*, Breite*,
Gillings : *breadth*,
Couchoud : sxw, *largeur*,
Clagett : wsx, *breadth*, *width*,
Imhausen : wsx, *Breite*,
Michel : sx[w], sxw, *largeur*.
Le terme *ouzékou*$_1$ (wzxw$_1$) désigne la **largeur** d'un rectangle.

ouzékhou$_2$ { wzxw$_2$ }

Voir **iou.èf hèr (ou)zékhou**.
M17$_{3, 8}$.
Rhind : *largeur*,
Gunn, Peet: *breadth*,
Struve : *Breite*,
Vogel : *Breite*,
Neugebauer: sx.w*, Breite*,
Reineke : wsx(.t)*, Breite*,
Gillings : *breadth,*
Couchoud : sxw, wsxw,(w)sxw, *largeur*,
Clagett : wsx, *breadth*, *width*,
Imhausen : wsx, *Breite*,
Michel : sx[w], sxw, *largeur*.
Le terme *ouzékou*$_2$ (wzxw$_2$) désigne la **« largeur »** du rectangle circonscrit à un triangle, passant par la base et le sommet opposé, c'est-à dire la base de ce triangle.

pou { pw}

Voir ***E* pou.**

qénébèt { qnb.t } 

M6$_5$, M7$_4$, M17$_6$ et figure.
Gunn, Peet: *square root*,
Struve : *Winkel (Quadratwurzel)*,
Reineke : *Quadratwurzel,* pp. 290-291 : qnb(.t) *Quadratwurzel, « Als fem. ist es nur im Pap. Kahun belegt, in Pap. Moskau und Berlin 6619 scheint es mask. Zu sein, bsw.es erscheint nur in der Schreibung (du coin), das fem. .t fellt. Das ist aber kein Beweis dafür, dass das Wort mask. Ist, da ja bei einer Reihe von Wörtern in derartigen Kurzschreibungen eine Genusdiskriminante unblezeichnet bleibt »*,
Couchoud : qnbt, *racine carrée*,
Clagett : *square root*,
Imhausen : qnb.t, *Wurzel*,
Michel : qnbt, *racine carrée* : p. 545, qnbt, *l'angle, le coin ; [math] la racine carrée.*
Pour signifier la racine carrée, les scribes égyptiens utilisent le signe des deux murs à angle droit (O38 dans la classification de Gardiner) qui a pour valeur phonétique qnb que l'on retrouve dans le terme *qénébèt* (qnb.t) qui signifie le tribunal ou encore le mot *qénébéti*

(qnb.tj) qui désigne le magistrat, celui qui se tient dans l'angle, dans le coin. Dans le *Fragment UC 32162 d'El-Lahoun*, le scribe ajoute la « lettre » t. Nous avons suivi W. Reineke et A. Imhausen qui proposent la transcription savante qnb.t et traduit par fais le **« coin »** revenant au traditionnel extrais sa racine carrée lors de notre adaptation.

sébédèt { sbd.t }

Voir **sébédèt nèt 2000 èm ahét.ès**, **sépédèt**
M17$_{1, 2}$.
Gunn, Peet: *triangle*,
Struve : *Dreieck*,
Neugebauer : *Dreieck*,
Reineke : *Dreieck,*
Couchoud : spdt, *pointe, triangle*,
Clagett : *triangle*,
Imhausen : spd.t, *Dreieck*,
Michel : spdt, *triangle*.
Pour désigner un **triangle**, en M7, le scribe emploie le terme *sépédèt* (spd.t) alors qu'en M17, il utilise le mot *sébédèt* (sbd.t), témoignage du changement de la lettre p en la lettre b. Dans les deux cas, le déterminatif est un triangle oblique alors que, dans le *Papyrus Rhind*, Âhmès trace un triangle reposant sur sa base horizontale.

sébédèt nèt 2000 èm ahét.ès { sbd.t nt 2000 AH.t.s }

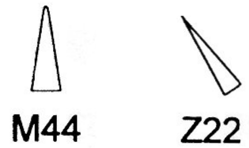
M17$_2$.
Gunn-Peet : *a triangle of 2 thousand(s-of-land) in its area*,
Struve : *ein Dreieck von 20 (Quadrat-xt) in seiner Fläche*,
Neugebauer : *ein Dreieck von 2000 als seiner Fläche (AH.t)*,
Reineke : *Ein Dreieck von 20 als seiner Fläche*,
Couchoud : spdt nt 2000 m AHt.s, *un triangle dont la surface est 2000*,
Clagett : *a triangle of 20 [setjat] in its area*,
Imhausen : spd.t n.t 20 m AH.t.s, *Ein Dreieck von 20 als seiner Fläche*,
Michel : spdt n(jj)t 2000, m AH.t.s, *un triangle de 2000 (coudées de terre) égales à son aire*.
Un triangle de 2000 pour sa superficie. Un triangle de superficie 2000 (*coudées de terre*).

sépédèt {spd.t}

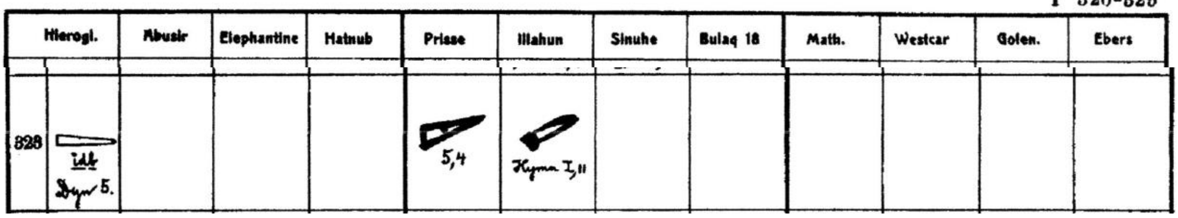
Voir **sébédèt**, **sépédèt nèt ahèt 2m.**
Rhind : R51$_{1, 2}$, *sépédèt* (spd.t), triangle.
Eisenlohr : spt, *Dreieck* (triangle),
Peet : p. 134, spdt, *triangle*,
Chace : spd.t, *triangle, sharp, pointed*,
Reineke : p. 229, spd.t, *Dreieck*,
Couchoud : spdt, *triangle* ; p. 201, *pointe*,
Clagett : spdt, *triangle* ; p. 291, spdt ou zpdt, *triangle, to be sharp*,
Imhausen : spd.t, *Dreieck*,
Moscou : M4$_{1, 2}$, M7$_{1, 2}$.
Gunn, Peet: *triangle*,
Struve : *Dreieck*,
Neugebauer : *Dreieck*,
Reineke : *Dreieck*,
Couchoud : spdt, *pointe, triangle*,

Clagett : spdt, *triangle,* p. 291, *to be sharp*,
Imhausen : spd.t, *Dreieck*,
Michel : spdt, *triangle*.
Dans les documents hiératiques qui nous sont parvenus de l'Égypte ancienne, nous trouvons quatre problèmes relatifs à des triangles sans qu'*a priori*, l'on puisse leur accorder une forme particulière : R51, M4, M7 et M17. Dans les trois premiers, les scribes utilisent le terme *sépédèt* (spd.t) tandis que dans le dernier, la « lettre » p a été transformée en b : selon nos principes de transcription, nous soulignons cette différence en écrivant *sébédèt* (sbd.t). Les exercices M7 et M17 étant de même nature, il ne semble pas que ce nouveau terme désigne une quelconque spécificité du triangle. Nous y voyons plutôt un changement de « lettre » dû à la consultation de divers textes écrits à des périodes différentes ou par différents scribes.
En revanche, il se peut que les déterminatifs distincts dans les deux documents, *Papyrus Rhind* et *Papyrus de Moscou*, poussent à envisager, pour le dernier texte, la considération de triangles rectangles. En effet, dans le R51, le scribe Âhmès écrit un triangle isocèle (M44 dans la classification de Gardiner) posé horizontalement sur sa base. Comme idéogramme le signe M44 désigne une épine, une pointe et comme déterminatif il est associé à tout ce qui est aigu, pénétrant, pointu ou encore de forme triangulaire : Gardiner[146] cite à ce sujet l'expression t-HD qui désigne un pain blanc ayant cette forme. Il nous est peut-être plus difficile de déterminer le correspondant hiéroglyphique du signe dessiné par le scribe qui a rédigé le *Papyrus de Moscou*. En effet, cette fois, le triangle est « oblique » et semblable à celui de la figure du M7. Point de signe dans la classification de Gardiner mais sans doute une marque apparentée au Z22 que nous trouvons dans des polices plus complètes comme *Hieroglyphica* (nous y trouvons aussi des formes différentes de M44, voir M176 ou M189 selon que la base du triangle isocèle est plus ou moins petite par rapport à la hauteur qui est la même) ou, plutôt, le signe de la langue de terre (N21 dans la classification de Gardiner, n°323 de Möller) :



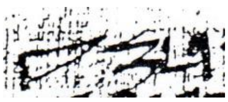


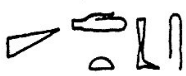
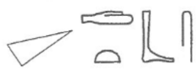
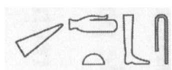
Rhind Moscou


I 320-329

	Hierogl.	Abusir	Elephantine	Hatnub	Prisse	Illahun	Sinuhe	Bulaq 18	Math.	Westcar	Golen.	Ebers
328	Dyn 5.				5,4	Hymn I,11						

sébédèt (sbdt)



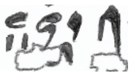
Papyrus Struve Gunn, Peet Imhausen
Michel

146 Gardiner, 1982, *Egyptian grammar*, p. 538.

Sans doute en employant diverses fontes d'impression, les divers commentateurs adoptent des positions qui sont toutes différentes : triangle rectangle pour Struve[147] et A. Imhausen[148], l'angle droit en haut pour le premier et en bas pour la seconde, triangle isocèle pour M. Michel et triangle dont la « base » est verticale dans l'article de Gunn et Peet. Difficile de les départager et ce d'autant plus que le scribe est peu appliqué et que ce qui peut être décidé pour une occurrence peut être facilement pris en défaut dans un autre écrit.

sépédèt nèt ahèt 2_m { spd.t nt AH.t 2_m }

M7_2.
Gunn-Peet : *a triangle of 2 thousands-of-land*,
Struve : *ein Dreieck der Fläche (von) 20 (Quadrat-xt)*,
Neugebauer : *ein Dreieck der Fläche (AH.t) 2 (Tausend-Land)*,
Reineke : *Ein Dreieck von einer Fläche 20*,
Couchoud : spdt nt AHt 2 jdb n 2 2', *un triangle de surface 2*,
Austin : spdt nt AHt 20 jdb n 2 2', *un triangle de surface 20*,
Clagett : *„[there is} a triangle with area of 20 [setjat*],
Imhausen : spd.t n.t AH.t 2 jdb n 2 2, *Ein Dreieck der Fläche 2*,
Michel : spdt n(jj)t AH.t 2 jdb n(jj) 2 2', *un triangle d'aire (égale à) 2*.
Un triangle (rectangle) d'une superficie de 2_m. Un triangle (rectangle) d'une superficie de *2 milles de terre*.

sététy { st.tjj }     

Voir **(ât ?) nèt sététy [12]**, **i <r 12 >pèn nét<y> èm sététy 1 3' [zèp]**.
M$6_{2, 4}$.
Gunn Peet : *a set and 2* arurae,
Struve: *Fläche* (sttj),
Neugebauer: *Fläche* (sttj),
Reineke: st.t, *Fläche*,
Gillings : *area*, opératoire,
Couchoud: stwtjj, *surface*,
Clagett : *setjat [in area]*, opératoire,
Imhausen : sTA.t <1>[sic!]2, *12* sTA.t, opératoire,
Michel : sttjj, *aire*.
Depuis l'édition de Struve, tous les commentateurs retiennent sa transcription hiéroglyphique mais n'en donnent pas la même transcription savante ainsi que la même interprétation. En fait le scribe a écrit les « lettres » s et t, suivies du signe de la peau de bovin percée (F29 de la classification de Gardiner) dont une des valeurs phonétiques est st et qui précède les « lettres » t et jj d'où nos transcriptions *sététy* (st.tjj) qui différent de celles données par W. Reineke (st.t) ou par S. Couchoud (stwtj). Mais, avant Struve, dans l'étude qu'ils ont consacré à quatre problèmes géométriques du *Papyrus de Moscou*, Gunn et Peet avaient mis l'accent sur les mesures en lisant un rectangle (Aa12 de la classification de Gardiner) au lieu de la « lettre » t et le chiffre 2 pour les deux traits obliques de la « lettre » jj. Cette interprétation a néanmoins été retenue par A. Imhausen qui transcrit sTA.t <1>[sic!]2 et sTA.t 2 et traduit 12 sTA.t alors que, comme la plupart des commentateurs nous préférons un terme proche de **superficie**.

[147] Struve, 1930, *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, pl. IV, XXXIII.
[148] Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, pp. 310, 316.

tèp hésèb èn zépou nou zéchou { tp Hsb n zpw nw zSw }

Titre UC 32 162.
Griffith : *model of calculating the problems (?) of a account-keeping,*
Reineke : *Art des Berechnung der Angelegenheiten (affaires) des Schreibens,*
Clagett : *Example of the calculating of problems (?) of account-keeping,*
Imhausen, Ritter : tp(n) Hsb n sp.w nw sS.w, *Method of calculating matters of account (calculating matters of account) (questions de comptes),*
Michel : *méthode de calcul de comptabilité*.
La traduction de cette introduction soulève quelques difficultés. M. Clagett s'appuie sur celle de Griffith tout en remplaçant *model* par *example*. Annette Imhausen et Jim Ritter attirent l'attention sur leur traduction particulière. Tous considèrent qu'implicitement la préposition *en* figure entre les premiers termes *tèp* (tp) et *hésèb* (tp Hsb) ce qui peut conduire à traduire *exemple de calcul*. Nous avons préféré suivre la voie empruntée lors de notre traduction du *Papyrus Rhind*. Les deux textes débutent par la même expression et il semble hasardeux de considérer que les deux scribes aient omis *en*. Nous prenons l'expression *tèp hésèb* (tp Hsb) comme un tout signifiant *bon exemple*, le terme *hésèb* (Hsb) servant à justifier l'exactitude, la bonne qualité de ce qui est présenté. Quant à *zépou nou zéchou* (zpw nw zSw) nous devons innover. Le terme *zépou* (zpw) est comme *zèp* (zp) associé aux répétitions. Le scribe l'emploie ensuite dans le cadre des multiplications et nous le rendons alors par *fois* comme lorsque nous disons *3 fois 4*. Le terme *zéchou* (zSw) est un pluriel : celui de *zèch* (zS) qui est lié à l'écrit. L'expression complète signifie donc des répétitions écrites. Si le mot n'était pas anachronique nous pourrions penser à des *algorithmes écrits*. Nous avons choisi des *pratiques écrites* ou *par écrit*. Nous voyons en effet une différence essentielle entre ce document et le *Papyrus Rhind*. Ici, les instructions sont exprimées de la même manière avec le classique *ir.khér.èk* (jr.xr.k), *tu feras* et la même formulation pour les conclusions *khépérèt im pou* (xpr.t jmp w) *de là, ce qu'il adviendra c'est*. Le scribe Âhmès qui rédige le *Papyrus Rhind* environ deux siècles plus tard est au contraire soucieux de diversifier ses pratiques et ses expressions : il s'adresse sans doute à un public moins au fait de certains langages mathématiques. En un certain sens, le *Fragment de Kahun* est plus près des documents babyloniens que l'autre texte. Ajoutons une particularité de cet écrit : les nombres sont écrits en rouge comme si l'auteur voulait insister sur leurs liaisons. Aujourd'hui, un lecteur qui ne connaît que les seuls signes numériques peut retrouver la procédure employée sans savoir précisément déchiffrer l'écriture hiératique.
Bon exemple de pratiques écrites.

zéchou { zSw }

Voir **tèp hésèb èn zépou nou zéchou**.

zékhou { zxw }

Voir **ouzékhou**.

zèp { zp }

Voir **ir zèp 2 2'**.

zépou {zpw }

Voir **tèp hésèb èn zépou nou zéchou.**

4 pou hèr (ou)zékhou { 4 pw Hr (w)zxw }
$M17_{8}$,
Gunn, Peet: *it is 4 (khet) on the breadth*,
Struve : *es ist 4 auf der Breite*,
Neugebauer: *es ist 4 auf der Breite*,
Reineke : *4 sind es an der Breite*,
Couchoud : *ce 4 est ma largeur*,
Clagett : *it is 4 [khet] on the breadth*,
Imhausen : *es ist 4 auf der Breite*,
Michel : *4 (*khet*) c'est pour la largeur.*
C'est 4 pour la « largeur ». C'est 4, pour la base !

Ecritures spécifiques
µ èm ahét.ès { µ m AH.t.s }
$M17_{2,\ 4}$
Gunn, Peet: 2000, *2 thousand(s-of-land),*
Struve : 20?, *20 (Quadrat- xt),*
Neugebauer: *20 (Quadrat- xt),*
Reineke : 20 m AH.t.s, *20 als seiner Fläche,*
Couchoud : 2000, *2000 (coudées),*
Clagett : *20 [setjat],*
Imhausen : 20, *20,*
Michel : 2000, *2000 (coudées de terre),*
2000 pour sa superficie
2000 (*coudées de terre*) pour sa superficie.

BIBLIOGRAPHIE

ARCHIBALD Raymond Clare, 1927, Bibliography of Egyptian Mathematics with special references to the Rhind Mathematical Papyrus and sources of interest in its study *in* Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 178-179, 187-188.

CANTOR Moritz, 1880-1907, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Teubner, vol. 1, 1880, 3ème éd. 1907 ; vol. 2, 1894.

CANTOR Moritz, 1898, Die mathematischen Papyrusfragmente von Kahun, *Orientalistische Litteraturzeitung* 1 (1898) 306-308.

CHACE Arnold et *alii*, 1927-1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, *British Museum 10057 and 10058*, 2 vol., Oberlin, Mathematical Association of America, 1927-1929.

CLAGETT Marshall, 1999, *Ancient Egyptian Science, A Source Book*, Volume Three, Ancient Egyptian Mathematics, Philadelphie, American Philosophical Society, 1999, 215, 388,

COLLIER Mark, QUIRK Stephen, 2004, *The UCL Lahun Papyri : Religious, Literary, Legal, Mathematical and Medical*, Oxford, BAR International Series 1209, 2004.

COUCHOUD Sylvia, 1983, *Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique*, Thèse de Doctorat de Troisième cycle, Lyon, Université Lyon II, 1983.

COUCHOUD Sylvia, 1993, *Mathématiques égyptiennes*, Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique, Paris, Éditions Le Léopard d'or, 1993 ; pp. 47-48.

DE YOUNG Gregg, 2009, Diagrams in ancient Egyptian geometry. Survey and assessment, *Historia Mathematica*, 36 (2009) 312-373.

FRIBERG Jöran, 2005, *unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics*, New Jersey, World Scientific, 2005.

GILLAIN Olivier, 1927, *La science égyptienne, l'arithmétique au Moyen Empire*, Bruxelles, Édition de la Fondation Égyptologique Reine Élisabeth, 1927 ; pp. 233-244.

GILLINGS Richard, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, Cambridge, The Massachusetts Institute of Technology, 1972 ; réimp., New York, Dover, 1982.

GUNN Battiscombe, PEET Eric, 1929, Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus, *The Journal of Egyptian Archaeology* 15 (1929) 167-185, pp. 171-174.

GRIFFITH Francis Llewellyn, 1898, *The Petrie Papyri, Hieratic Papyri from Kahun and Gurob (principally of the Middle Kingdom)*, 2t., Londres, Bernard Quaritch,1898. I, 17-18, 101, II, pl. VIII,

IMHAUSEN Annette, 2003, *Ägyptische Algorithmen*. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathematischen Aufgabentexten, Wiesbaden, Harrassowitz Verlag, 2003 ; pp. 78-79, 83-84, 316.

IMHAUSEN Annette, RITTER James, 2004, Mathematical Fragments: UC 32114B, UC 32118B, UC 32134A+B, UC 32159-UC 32162, *in* Collier, Quirk, 2004, *The UCL Lahun Papyri*, pp.71-96 ; pp. 78-80.

MASPERO Gaston, 1897-8, *The Petrie Papyri* de F. Griffith, *Journal des savants* (avril 1897) 206-221, (février 1898) 98-113, (mars 1898) 145-159.

MICHEL Marianne, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*, Numération, métrologie, arithmétique, géométrie et autres problèmes, Bruxelles, Éditions Safran, 2014, pp. 217-219.

NEUGEBAUER Otto, 1931_2, Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik Astronomie und Physik* 1 (1931) 413-451; p. 415.

PARKER Richard, 1972, *Demotic Mathematical Papyri*, Providence, Brown University Press, 1972.

PEET Eric, 1923_1, *The Rhind Mathematical Papyrus British Museum 10057 and 10058*, introduction, transcription, translation and commentary, Londres, The University Press of Liverpool, Hodder and Stougthon, 1923 ; réimp. Nendeln (Liechtenstein), Kraus Reprint, 1970.

PEET Eric, 1931_2, Mathematischer Papyrus des Staadtlichen Museums der Schönen Künste in Moskau von W.W. Struve, *The Journal of Egyptian Archaeology* 17 (1931) 154-160, pp. 154-155, 160.

REINEKE Walter-Friedrich, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* Thèse, 2 vol., Berlin, Humbolt-Universität,1964, pp. 150-151.

SPALINGER Antony, 1990, The Rhind Mathematical Papyrus as a Historical source, *Studien zur Altägyptischen Kultur* 17 (1990) 295-337.

SAINTE FARE GARNOT Jean, 1959, Un Témoignage sur Wladimir Golénischeff, *Bulletin de l'Institut Français d'Archéologie Orientale*, 58 (1959) pl. I.

SCHACK-SCHACKENBURG Hans, 1900, Der Berliner Papyrus 6619, *Zeitschrift für Ägyptische Sprache und Altertumskunde* 38 (1900) 135-140 ; pp. 138-139.

STRUVE Wasili, 1930 (1977), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, herausgegeben und kommentiert unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von B. A. Turaeff, Berlin, Spinger, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, 1930, rééd. , Würzburg, Jal-reprint, 1973, pp. 133-134.

TSINSERLING D. P. , 1925, Geometriya u drevnikh egitpyan (Géométrie dans l'ancienne Égypte), *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'Union des Républiques Soviétiques Socialistes*, Léningrad, 19 (1925) 541-568, pp. 559, 565.

TURAEV Boris, 1917, The volume of the truncated pyramid in Egyptian mathematics, *Ancient Egypt*, Londres, 1917, pp. 100-102.

VOGEL Kurt, 1930_3, Der Moskauer mathematische Papyrus, *Archiv für Geschichte der Mathematik der Naturwissenschaften und der Technik* 13 (1930) 446-463 ; pp.454-455, 462.

VOGEL Kurt, 1958, *Vorgriechische Mathematik*, 2 t., Hannovre, Hermann Schroedel Verlag ; Paderborn, Verlag Ferdinand Schöningh, 1958; p. 65.