Expressions de 2 à partir de 101

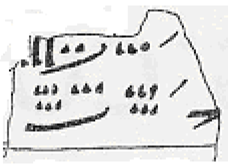
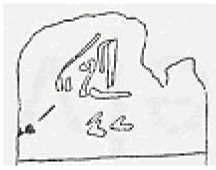
Comme tous les auteurs, nous avons placé le texte qui suit dans le cadre général de ceux qui le précèdent, soit, selon notre appellation, celui des *expressions de deux à partir d'un entier*. En fait, nous pouvons nous interroger. L'exercice R2/101 sort des sentiers tracés par l'Auteur.

Tout d'abord, et ce pour la première fois, le propos du scribe revient à exprimer le double d'un quantième à l'aide de ce quantième et d'autres quantièmes :

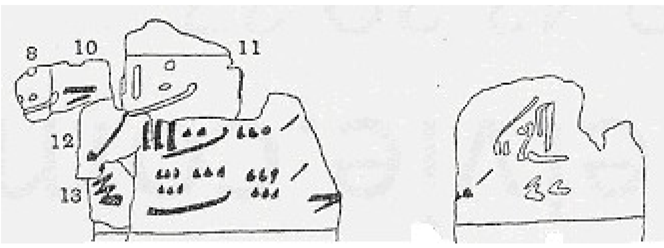
$$\frac{1}{101} \otimes 2 = \frac{1}{101} \times 2 = \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}.$$

Or, comme nous le montrerons dans notre commentaire, si nous situons cette expression dans un cadre général, elle s'avère être inutile pour un doublement ultérieur.

Ensuite, l'écrit qui nous est parvenu provient sans doute essentiellement de certains *Fragments de Brooklyn* laissant ainsi quelques marges d'incertitude quant à la restitution du texte que nous pouvons effectuer. Toutefois, compte-tenu de l'ensemble des portions du papyrus que nous possédons, il est assuré qu'il provient du saut entre le bord gauche de la partie *BM 100057* et le bord droit de l'autre partie *BM 10058* du *Papyrus Rhind**et qu'Âhmès l'a écrit dans la première bande. Nous devons considérer principalement les *Fragments B4* et *B6* que viennent compléter les *Fragments B8, B10, B11, B12 et B13* selon le positionnement effectué par Peet.

B4  B6 

B8  B10  B11  B12  B13 



D'après la planche E de Peet.

Le placement de tous ces fragments doit être retenu. En effet, par le *Fragment B4*, nous apprenons que le scribe multiplie 101 respectivement par 3 et par 6 selon les présentations usuelles qui conduisent aux quantièmes 1/303 et 1/606 ainsi qu'à leurs correspondants 1/3 et 1/6 écrits respectivement dans les *Fragments B12* et *B13*. Sans aucun doute, le tiret et les deux points que nous lisons à la dernière ligne du *Fragment B6* ainsi que le demi qui est écrit au début de la dernière ligne du *Fragment B4* sont relatifs aux mêmes calculs de la multiplication de 101, cette fois par 2. Nous trouvons le quantième 1/202, mais écrit en rouge, sur le *Fragment 11* suivi du demi qui lui est associé, ce dernier figurant dans le *Fragment 10.* Ce *Fragment 10* ainsi que le *Fragment 8*, comportent des parties du quantième 1/303, suite naturelle des écritures qui précèdent. Notons que nous avons aussi, avec les *Fragments B4* et *B11*, les limitations de la bande supérieure dans laquelle Âhmès a écrit le texte de l'exercice R2/101. Il reste le terme *séchémèt* (sSm.t) qui figure en haut du *Fragment B6* placé par Peet. Comme Chace et ses collègues ainsi que W. Reineke et Clagett, nous pourrions penser que, semblablement à tous les exemples de ce corpus situés en haut de page, le scribe a mis au-dessus de ce mot l'expression « classique » ***nis 2*** *khénèt 101* (**njs 2** xnt 101) : « *At the top of the fragment bearing* sSm.t *appears the end of a stroke in black ink not reproduced on the opposite plate (see Photograph IX, register 1). From the position of* sSm.t *in the precedings examples one would suppose this to be a part of some sign at the beginning of the heading "*njjs 2 xnt 101*". It is perhaps a low-placed dot between* njjs *and 2 (compare the red dot in 2 divided by 29), or possibly a stroke of the 2, although the 2 is everywhere red in these headings except in 2 divided by 3* [1]». Mais il s'avère que l'écriture de cette expression paraît fort improbable car il reste peu de place entre le haut du *Fragment B6 de Brooklyn* et la ligne hypothétique délimitant la bande où figure l'exercice considéré. Comme le montre le montage ci-dessous effectué à partir des *Fragments de Brooklyn* et du début des *expressions* R2/89, les signes seraient trop petits par rapport à ceux employés par Âhmès pour écrire *séchémèt* (sSm.t) (nous avons tracé en bleu le cadre de la bande afférente).

Fragments de Brooklyn   début de R2/89   Insertion

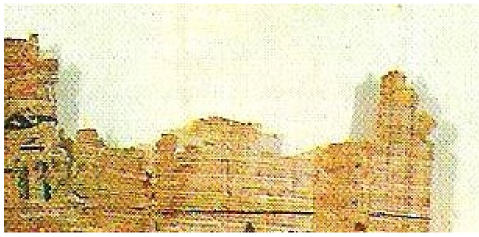
Aussi, nous sommes plutôt enclins à suivre Peet qui situe la première ligne de R2/101, dans la même perspective que les exemples qui ne figurent pas en haut de page. Le scribe aurait commencé par écrire le nombre 101 précédé ou non par un point. Nous aurions alors la trace en noir du point précédant ce nombre. En effet, cette marque est centrée sur la « ligne d'écriture » ce qui nous amène à rejeter une partie du nombre 101. En agissant ainsi, l'Auteur veut sans doute signifier le caractère particulier de l'exemple R2/101. Seul le calcul compte, les expressions ne sont plus le moteur de l'exercice.

Un autre point de détail peut soulever quelques difficultés. La bande du haut où devait se trouver les *expressions de deux à partir de 101* est fort endommagée et il nous est difficile de préciser exactement l'endroit où devaient figurer les expressions manquantes : 1/3 **1/606** 1/6 qui pourraient être précédées du chiffre 3 élément du quantième 1/303. Cette dernière hypothèse est fondée sur l'affirmation des auteurs groupés autour de Chace : « *Mr. Glanville of the British Museum informs us that part of a red stroke is visible on B. M. 10057 in the top line of register 1 near the right hand edge of the recto. This is perhaps part of the last unit stroke of the 3 in 1/303* [2]». Depuis1924, Stephen Glanville (1900-1956) était assistant au département

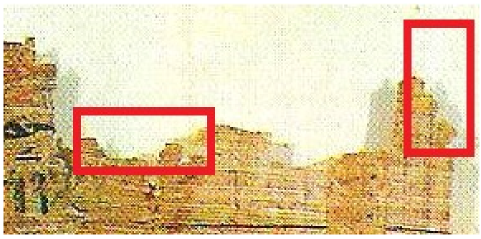
[1] Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, 2divided by 101, note 1.
[2] Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, 2 divided by 101, pl. 33.

des antiquités égyptiennes et assyriennes du British Museum. Il participa à l'édition américaine du *Papyrus Rhind* en lui ajoutant celle du *Rouleau de cuir*, document mathématique qu'il avait publié en 1927[3]. Ayant directement accès au *Papyrus Rhind**, nous pouvons donner un certain crédit au regard porté par Glanville et ce d'autant plus que la restauration de l'exercice impose de placer le chiffre 3 au bord de la partie *B. M. 10057*. Il n'en demeure pas moins que le *Fac-similé du British Museum* ne montre aucune trace rouge pouvant indiquer une portion de barre verticale. Malheureusement, la reproduction photographique fournie par G. Robbins et C. Shute montre que les dernières restaurations ont encore accentué le manque de papyrus de telle sorte qu'il est impossible de vérifier aujourd'hui l'assertion formulée par Glanville

Fac-similé, pl. 7



Robins, Shute, pl. 9

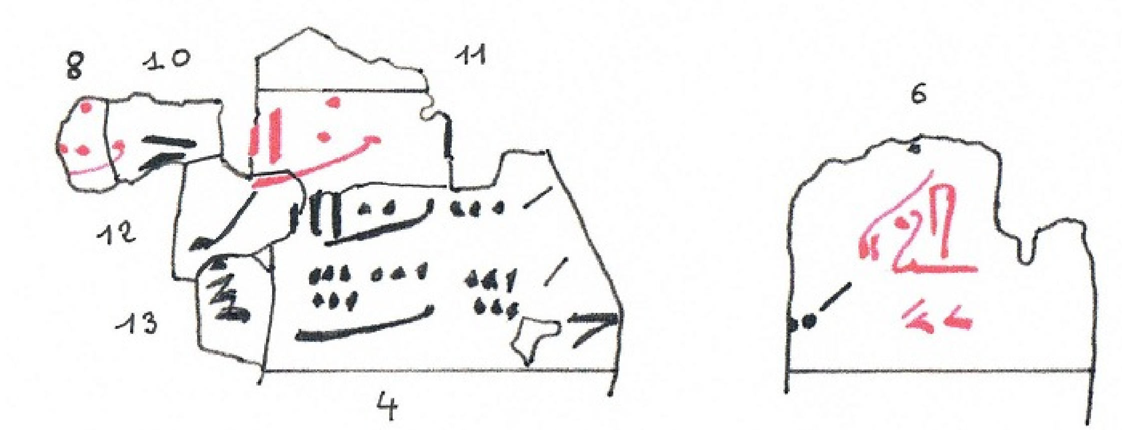


Site du British Museum

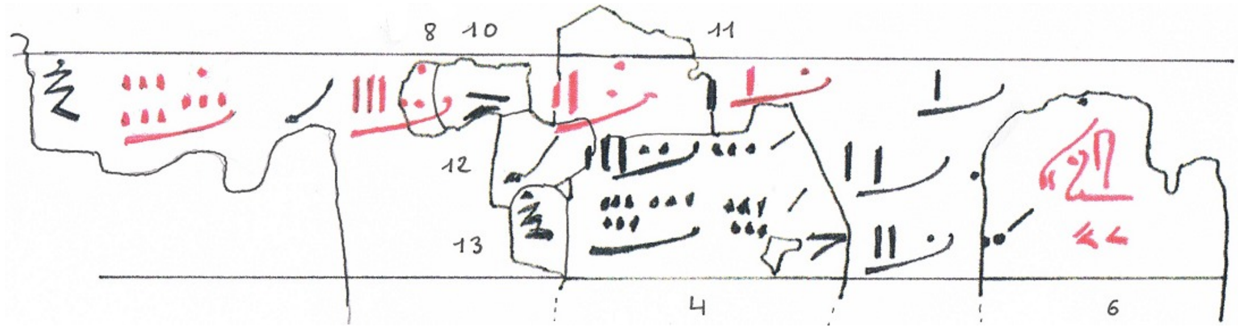
Peet n'en fait pas état et la photographie publiée par Chace et ses collègues ne permet pas d'en juger. Aussi, comme ces derniers auteurs, nous considérons que la totalité du chiffre 3 est manquante tout en la restaurant très près du bord droit de la partie *B. M. 10057*.

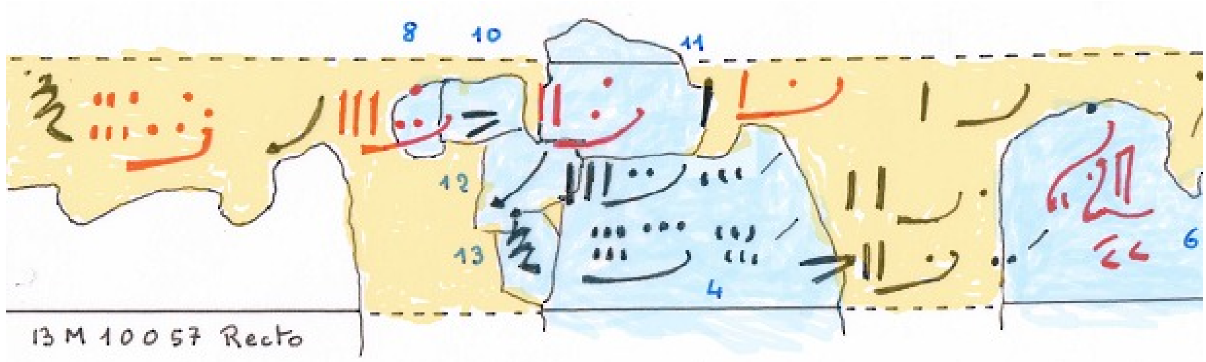
[3] Glanville, 1927, The mathematical leather roll in the British Museum.

TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE

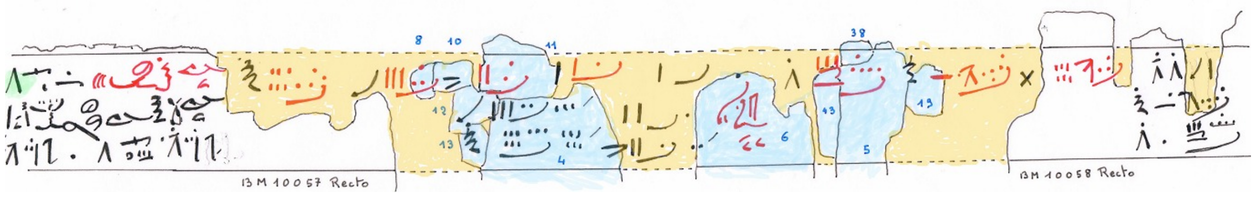


Restitution

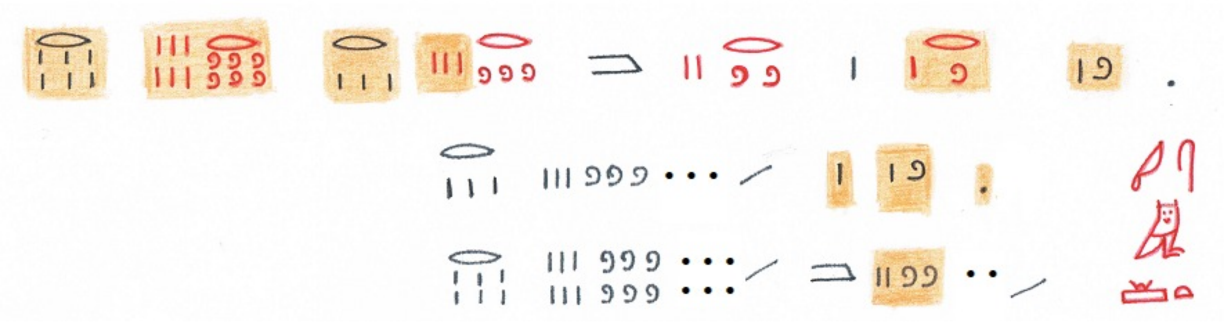




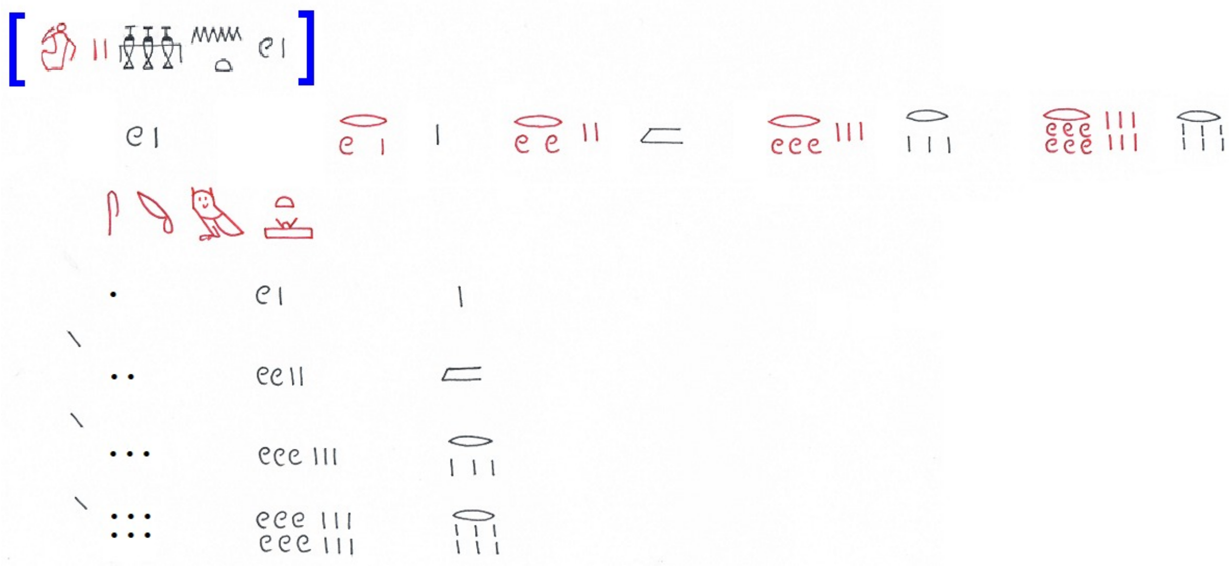
« Raccord » entre les deux parties du *Papyrus Rhind* du British Museum



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSCRIPTION SAVANTE

L_1 <·101 101’> 1 202’ 2’ 3<03’ 3’ 606 6’>
L_2 sSm <1 101 1> \ 3_1 303 3’
L_3 .t \ 2 <202> 2’ \ 6 606 6’

TRANSCRIPTION VOCALISÉE

L_1 *<·101 101’> 1 202’ 2’ 3<03’ 3’ 606 6’>*
L_2 *séchém- <1 101 1> \ 3 303 3’*
L_3 *èt \ 2 <202> 2’ \ 6 606 6’*

TRANSCRIPTION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 .[1] < 101 **101’**> 1 **202’**[2] 2’[3] **3<03’**[4] 3’ **606** 6_3’>[5]
L_2 [6]**séchém-** <1_1 101 1[7]> \ 3_1 303 3’
L_3 **èt$_1$** \ 2_1 <202[8]> 2’ \ 6_1 606 6_3’

1 — Nous considérons que le point figurant en haut du *Fragment B6* est le début de l’exercice R2/101. Âhmès l’a disposé « au milieu » de la ligne d’écriture.

2 — Le chiffre 1 est écrit au bord droit du *Fragment B11* où nous lisons, presqu’en totalité, le quantième 1/202.

3 — Le demi figure sur le *Fragment B10*.

4 — Le début du quantième 1/303 figure dans les *Fragments B10 et B8*.

5 — Nous complétons la première ligne à l’aide des résultats et expressions figurant dans la partie calcul. Il se peut que le chiffre 3 ait figuré au bord droit de la partie *BM 100058 du British Museum*.

6 — Le terme *séchémèt* (sSm.t) est écrit verticalement.

7 — Dans la partie manquante de la deuxième ligne, entre les *Fragments B6* et *B4*, nous considérons qu’il y a seulement la place pour la suite des nombres 1, 101 et 1. Nous ne pouvons pas savoir si Âhmès les avait écrits tous les trois ou même s’il avait pu considérer le quantième 1/101 au lieu de l’entier associé, à savoir, le nombre 101.

8 — Nous complétons la première ligne à l’aide des résultats et expressions figurant dans la partie calcul. Il se peut que le chiffre 3 ait figuré au bord droit de la partie *BM 100058 du British Museum*.

Traduction

$//_{1}$	.<·101	**101’>**	1	**202’**	2’	**3<03’**	3’	**606**	6’>
$//_{2a}$	**Calcul**								
$//_{2b}$	<\ 1	101	1>						
$//_{3a}$	\ 2	<202>	2’						
$//_{2c}$	\ 3	303	3’						
$//_{3b}$	\ 6	606	6’						

ADAPTATION[1]

·<101	**1/101>**	1	**1/202**	1/2	**<1/>3<03**	1/3	**606**	1/6>
Calcul								
<\ 1	101	1>						
\ 2	<202>	1/2						
\ 3	303	1/3						
\ 6	606	1/6						

1 — Nous avons considéré que le scribe avait délibérément placé cet exemple en dehors des *expressions de deux à partir d’un entier*.

EXPRESSION DE 2 À PARTIR DE 101

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 101* sont :

$$\textbf{(d}_{101}\textbf{)} \quad \frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_{101}\textbf{)} \quad 2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 101

Nous proposons la reconstruction suivante :

1	101	(initialisation)
\ 1/101	1	(inversion)
\ 1/202	1/2	(dédoublement)
Manque	1/3 1/6	
\ 1/303	1/3	(inversion-multiplication)
\ 1/606	1/6	(inversion-multiplication)

Il est bien entendu, qu'ici, l'établissement du *manque* ainsi qu'une vérification éventuelle sont immédiats.

EN GUISE DE CONCLUSION

Avec ce dernier exercice, l'Auteur introduit, pour la première fois, le quantième dans l'expression de son double, à savoir, 1/101 dans la décomposition de 2/101. Certes la *décomposition de deux* **(2$_{101}$)** est classique et elle permet, par «généralisation», d'écrire :

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}.$$

Mais en considérant le quantième $1/n$, on aboutit, en général, à une impasse lorsque l'on veut la doubler. En effet, en utilisant les décompositions de type « multiple de trois », nous avons alors :

$$\frac{4}{n}=\frac{2}{n}\times 2=(\frac{1}{n}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n})\otimes 2=(\frac{1}{n}\otimes 2)+(\frac{1}{2n}\otimes 2)+\frac{1}{3n}\otimes 2+(\frac{1}{6n}\otimes 2)=$$
$$=(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n})+\frac{1}{n}+(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n})+\frac{1}{3n}=(\frac{1}{n}+\frac{1}{n})+(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n})+(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n})+(\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n})=$$
$$=(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n})\times 2.$$

Nous obtenons la même expression et donc nous ne pouvons pas simplifier. Autrement dit, cette expression est pratiquement inutile et nous comprenons mieux pourquoi elle n'a pas été retenue par l'Auteur pour les autres nombres. Dans une autre perspective, nous pouvons penser que pour des nombres premiers supérieurs à 101, le scribe a voulu montrer les limites des procédés et placer l'exemple R2/101 dans son rôle minimal : celui d'une seule utilisation impliquant le refus d'un autre doublement.

Notons qu'il n'existe pas de *décomposition de 2/101 en deux, trois ou quatre quantièmes* distincts supérieurs à 1/1000. Si nous passons outre cette dernière limitation, nous avons, par exemple, en utilisant les *décompositions de deux* données respectivement dans R2/97 et R2/47 :

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{56} + \frac{1}{808} + \frac{1}{1414} \quad \text{et} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{28}) + \frac{1}{8} + \frac{1}{14}$$

ou[4]

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{60} + \frac{1}{404} + \frac{1}{1515} \quad \text{et} \quad 2 = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}) + \frac{1}{4} + \frac{1}{15}$$

Nous pouvons alors considérer que la donnée, pour l'exercice R2/101, de cette forme particulière d'expression est un témoignage de l'imposition d'une certaine limitation à la grandeur des quantièmes.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 8, 16.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. VI-VII.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 83, 85-87, 91.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, pp. 257-258.
Caveing, 1994, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, pp. 356-359.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 60.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. IX, pl. 33.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 33.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 133, 342.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, pp. 200-204.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 69.
Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 296.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, p. 101.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 138, 140, 166.
Midonick, 1968, *The Treasury of Mathematics*, p. 89.
Neugebauer, 1926_1, *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung*, p. 23. 41?
Neugebauer, 1931, Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter, p. 353.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 47, pl. D-E.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{50}, p. 91.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 8.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363-364, 371, 377-378, 382.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Van der Waerden, 1980, The (2: n) Table in the Rhind Papyrus, p. 259.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 128.
Vogel, 1929, Erweitert die Lederrolle unsere Kenntnis ägyptischer Mathematik ? p. 404.
Wieleitner, 1925_1, Zur ägyptischen Mathematik, p. 131.

[4] Cette deuxième décomposition est citée dans Wieleitner, 1925_1, Zur ägyptischen Mathematik, p. 130.