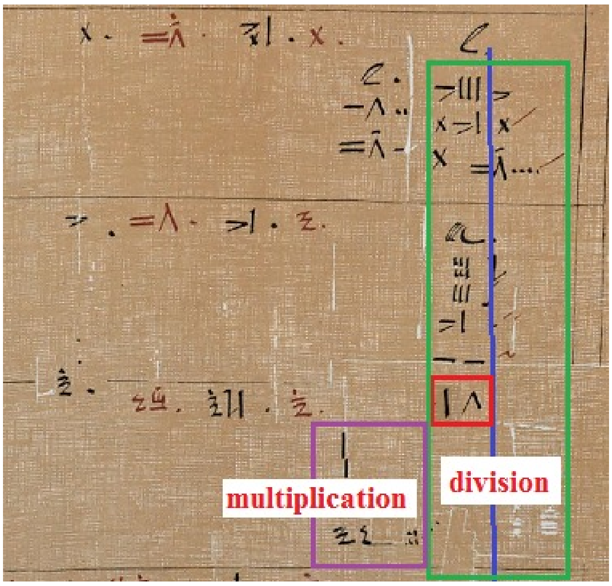
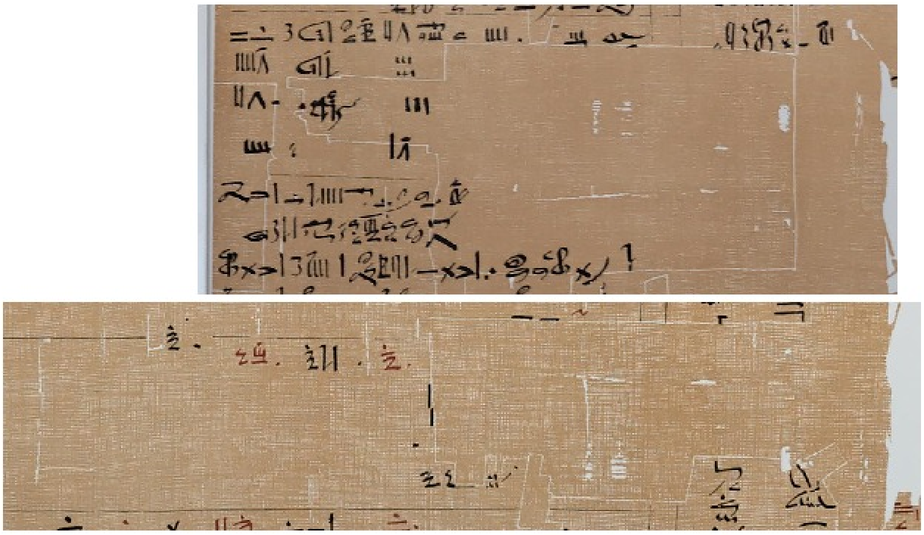
# Expressions de 2 à partir de 11

De tous les exercices des *expressions de deux à partir d'un entier*, le R 2/11 est celui dont le texte qui nous est parvenu comporte le plus de manques. Toutefois, eu égard aux variations habituelles de présentation ou d'écriture, la restauration de celui-ci ne pose pas beaucoup de difficultés. En effet, en dehors du nombre 11 par lequel devait débuter l'exercice, la première ligne est complète, ce qui nous permet de rendre fort plausible sa restitution. De plus, si l'on en juge par la disposition, il semble que le scribe ait opéré comme en R 2/7, où il a distingué la division « verticale », totalement absente dans le document qui nous est parvenu, mais sans doute écrite par Âhmès, de la multiplication auxiliaire pour laquelle subsistent des éléments des nombres 11, 22 et 4, ainsi que la majeure partie de la dernière ligne sans que nous sachions si Âhmès avait écrit comme derniers termes des nombres entiers ou les quantièmes dont ils sont les inverses. Par ailleurs les traits parallèles de séparations qui cadrent chaque exercice ont aussi souffert. En outre, les deux barres verticales qui délimitaient l'exercice R2/11 de l'introduction ont disparu[1].



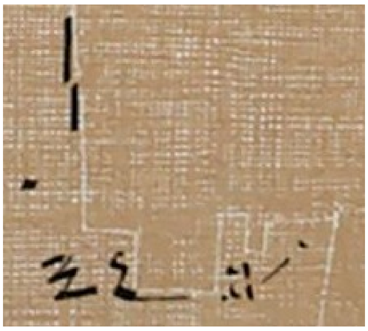

Concrètement, il semble que le papyrus ait subi à cet endroit diverses restaurations qui affectent non seulement le *recto* mais aussi le *verso* en particulier les lignes 11 et 12 de l'exemple R 62 et les lignes 1 et 2 du problème R 63. Nous rappelons que quand on a le *recto* sous les yeux et que l'on veut lire le *verso*, il faut un retournement du document de telle sorte que le haut du *recto* se retrouve au dos tête en bas. En nous basant sur le fait que certains signes de l'exemple R62 sont plus épais, ce que note aussi avec infiniment de finesse l'auteur du *Fac-similé* en ménageant un contour blanc très fin à cet endroit qui encadre une réécriture de certains signes, nous avons une bonne raison de penser qu'à une époque où le document était encore consulté, il y a eu une réparation importante concernant à la fois le *recto* et le *verso*, par le collage de patchs rectangulaires de tailles différentes collés de part et d'autre, l'un sur l'autre, de telles sorte que les bords communs soient situés au niveau de la *Page d'Introduction* à la hauteur de la première colonne, tandis que leurs bords jointifs inférieurs furent placés au niveau du trait de bande séparant le R 2/11 des autres exercices. Quant à l'exercice R2/11, le manque de texte poursuit vers le bas celui de la dernière ligne du R 2/9. On peut regretter que le travail de recopie n'ait pas été mené pour R2/9 et R2/11.

[1] Cette absence est encore soulignée par le non alignement des barres du dessus avec celles du dessous.

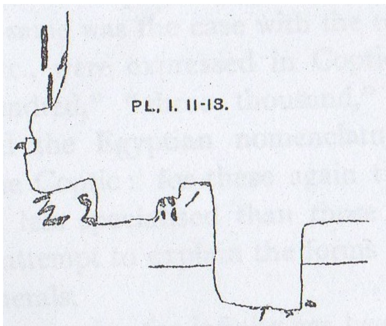


*Fac-similé du British Museum*, Parties de R62, R63 et R2/11.

Cette restauration rend délicate la transcription hiératique. Une fois de plus, nous pouvons voir une distorsion entre le *Fac-similé*[2] et la correction apportée par Francis Griffith[3]. De plus les diverses reproductions photographiques sont peu claires à cet endroit.



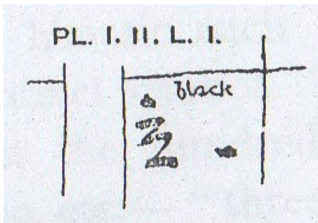
Fac-similé




Griffith

Un autre patch concerne le quantième 1/6 qui se trouve normalement à la fin de la première ligne mais à cheval sur la ligne qui devrait indiquer la séparation entre les exercices R2/9 et R2/11.

Chace 1979 [4]




Griffith

Comment expliquer une telle dégradation qui n'a peut-être comme équivalant que celle qui affecte la cassure du papyrus en deux morceaux ayant entraîné de nombreux fragments

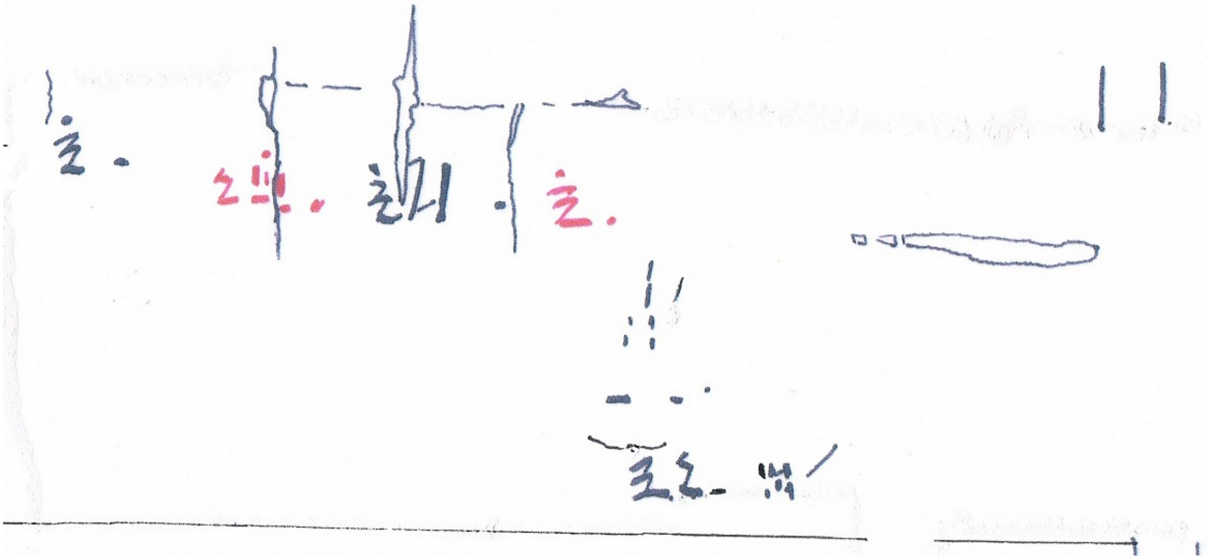
[2] British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. I.
[3] Griffith, 1894, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pl. 2.
[4] Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 82.

comme dégâts collatéraux qui, fait du hasard, concernent également la lecture de la fin des *expressions de deux par un entier* et qui, ayant été confrontés aux vicissitudes de l'histoire, se sont retrouvés de l'autre côté de l'Atlantique, au Musée de Brooklyn[5]. Dans les deux cas, l'explication peut être liée à l'usure du papyrus suite aux nombreuses manipulations en raison des consultations sans fin des *expressions* et qui ont affecté les deux parties les plus sensibles, à savoir le milieu du papyrus où se trouve au *recto* la fin des *expressions de deux à partir d'un entier* et le début du dit *recto* qui fait suite à la partie manquante qui était destinée à recevoir les cordelettes de fixation du rouleau. Les consultations à répétitions sur de nombreuses années ont pu fragiliser le papyrus en son centre au niveau du bord droit du *recto*. N'oublions pas aussi l'hypothèse selon laquelle le papyrus aurait été volontairement scindé en deux par le vendeur afin d'en tirer davantage d'argent[6].

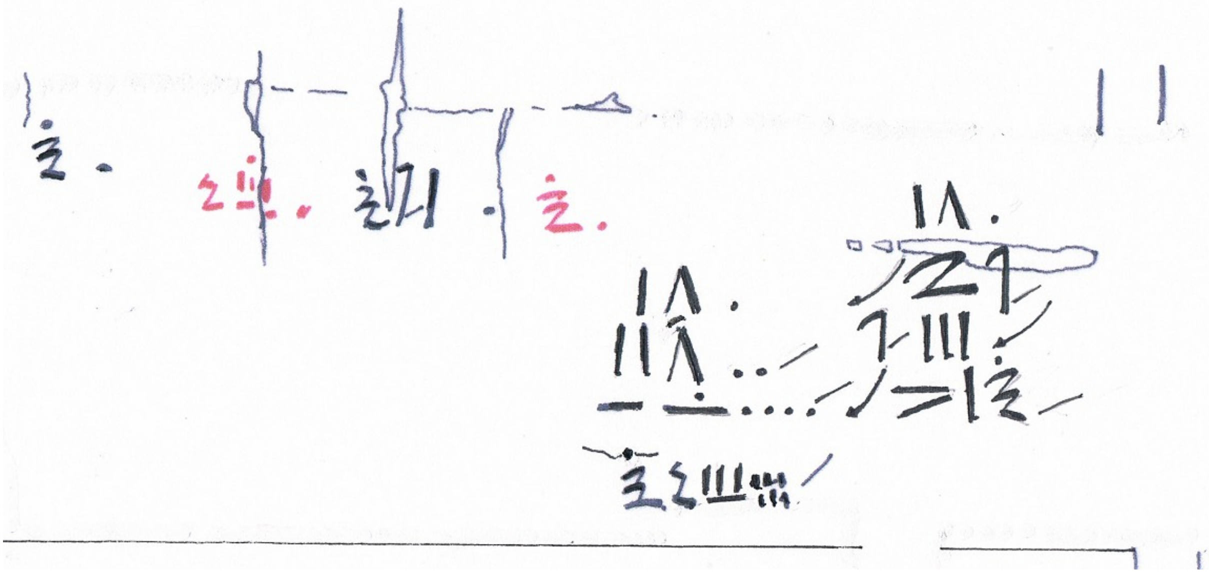
[5] Voir notre Introduction générale.

[6] Voir aussi notre Introduction générale.

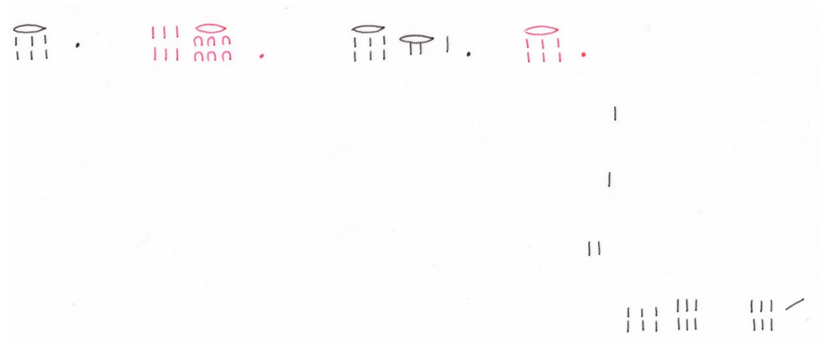
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



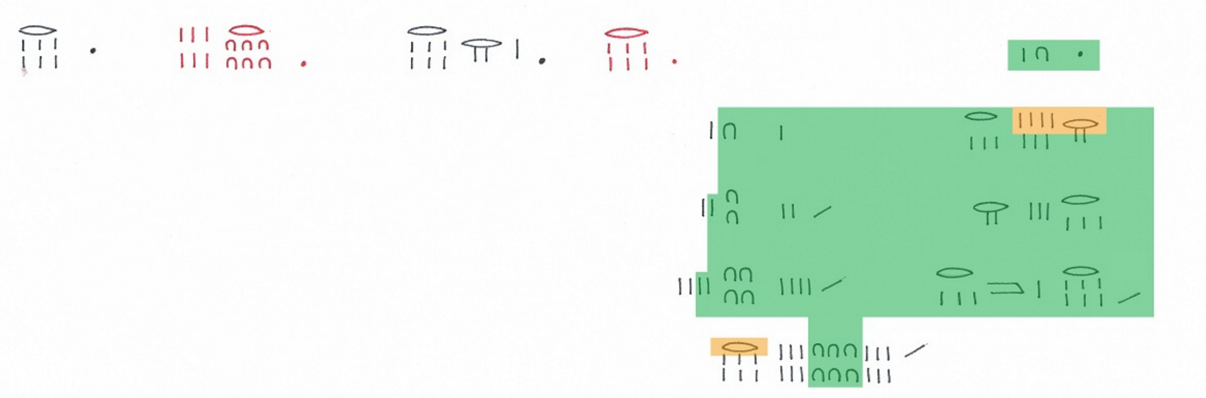
Restauration



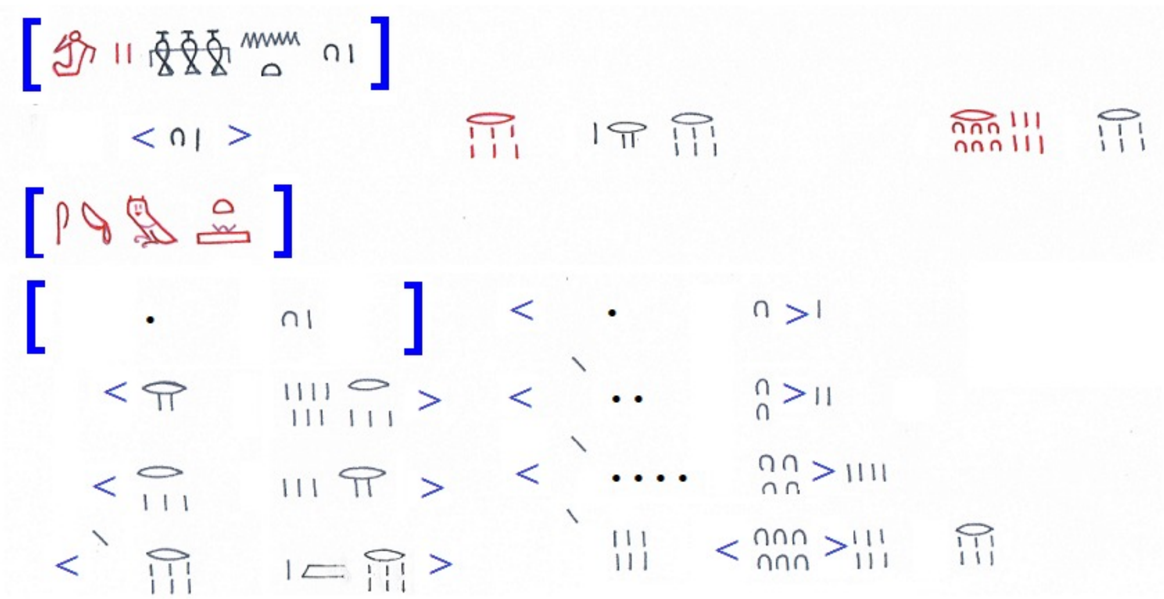
## TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



Restitution



## TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **L1** | < · | 11> | · 6' · 1 3'' 6' | · 66' · 6' | |
| **L2** | < 3'' | 7 3' | 1 | 1>1 | |
| **L3** | < 3' | 3 3'' | \ 2 | 2>2 | |
| **L4** | <\ 6' | 1 2' 3' | \ 4 | 4>4 | |
| **L5** | | | \ 6 | <6>6 | $6^{<\cdot>}$ |

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **L1** | < · | 11> | · 6' · 1 3'' 6' | · 66' · 6' | |
| **L2** | < 3'' | 7 3' | 1 | 1>1 | |
| **L3** | < 3' | 3 3'' | \ 2 | 2>2 | |
| **L4** | <\ 6' | 1 2' 3' | \ 4 | 4>4 | |
| **L5** | | | \ 6 | <6>6 | $6^{<>}$ |

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **L1** | < [1]· | 11> | · $6_3$' · 1 3'' $6_3$' | · $66_2$' · $6_3$' | |
| **L2** | < 3'' | 7 3' | $1_1$ | 1>1 | |
| **L3** | < 3' | 3 3'' | \ $2_1$ | 2>2[2] | |
| **L4** | <\ $6_3$' | 1 2' 3'[3] | \ $4_1$[4] | 4>4[5] | |
| **L5** | | | \ 6 | <6[6]>$6_2$ | $6_3^{<'>}$[7] |

**1** — Comme l'affirme Peet, la restauration du texte est pratiquement certaine. Celle de la première ligne obéit aux « écritures classiques » : · *n*. Quant aux autres lignes nous avons sans doute une disposition semblable à celle de R2/17 où Âhmès indique en deux parties la division et la multiplication auxiliaire suivie de la ligne correspondant à l'explication multiplicative.

**2** — On ne voit que la seconde barre du chiffre 2. Nous ne pouvons pas savoir si nous devons considérer un nombre entier, à savoir, 22, ou son quantième associé, 22'. Nous avons choisi, ici, et dans les lignes qui suivent, le nombre entier.

**3** — Nous avons suivi la procédure que nous lisons en R2/17 et R2/23 où l'Auteur a donné des expressions différentes de la première ligne, privilégiant ainsi le seul calcul aux dépens de l'expression secondaire correspondante.

**4** — Nous avons choisi la graphie pointée pour le multiplicateur 4.

**5** — On ne voit que la fin du chiffre 4.

**6** — Le chiffre 60 est effacé. Il nous est donc difficile de savoir si nous avons un nombre entier ou un quantième.

**7** — Le point indiquant le quantième est dans une brisure longitudinale.

Traduction

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $//_1$ | <[1] | 11> | **6’** | 1 3’’ 6’ | | | **66’** | 6’ |
| $//_2$ | < 3’’ | 7 3’ | | 1 | 1>1 | | | |
| $//_3$ | < 3’ | 3 3’’ | | \ 2 | 2>2 | | | |
| $//_4$ | <\ 6’ | 1 2’ 3’ | | \ 4 | 4>4 | | | |
| $//_5$ | | | | \ 6 | <6>6 | 6<’> | | |

**1 —** Pour la restitution du texte (mise entre crochets par lignes de texte) nous nous sommes appuyés sur l’exemple R2/17 en prenant en compte, d’une part, une division de 2 par 11 et, d’autre part, une multiplication de 11 par 6 terminée par l’explication multiplicative présentée ici sous sa forme entière.

Adaptation

**[Exprime 2** à partir de 11**]**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| <11> | **1/6** | 1 2/3 1/6 | **1/66** | 1/6 | |

**[Calcul]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [1 | 11] | | | |
| < 2/3 | 7 1/3 | 1 | 1>1 | |
| < 1/3 | 3 2/3 | \ 2 | 2>2 | |
| <\1/6 | 1 1/2 1/3 | \ 4 | 4>4 | |
| | | \ 6 | <6>6 | 1/6 |

## EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 11

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 11* sont :

$$\textbf{(d}_{11}\textbf{)} \quad \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66} \quad \text{et} \quad \textbf{(2}_{11}\textbf{)} \quad 2 = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}) + \frac{1}{6}.$$

Outre le *Fragment UC 32159-f = K IV. 2 de El-Lahoun*[7], les *Tablettes de bois JE 25 367 et 25 368 du Musée du Caire*[8] montrent, qu'au Moyen Empire, les scribes connaissaient ce résultat pour exprimer le double du quantième 1/11. On « retrouve » aussi la même décomposition dans le *Papyrus grec Michigan* 621 [9], dans un papyrus démotique de l'époque romaine[10], ou encore dans la *Tablette grecque de bois AF 1196* [3] *du Musée du Louvre*[11] ainsi que dans le *Papyrus byzantin d'Akmîm*[12]. Nous pouvons aussi citer un papyrus grec[13] ainsi que le fameux *Liber abacci* de Léonard de Pise[14]. Notons que l'Auteur utilise implicitement cette expression lors de l'exemple R38.

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant **(d₃₃)**, nous avons les décompositions suivantes de 4/11 et de 8/11 respectivement en deux et trois quantièmes :

$$\frac{1}{11} \times 4 = (\frac{1}{11} \otimes 2) \otimes 2 = (\frac{1}{6} + \frac{1}{66}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 3} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 33} \otimes 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{33},$$

$$\frac{1}{11} \times 8 = (\frac{1}{11} \times 4) \otimes 2 = (\frac{1}{3} + \frac{1}{33}) \otimes 2 = (\frac{1}{3} \otimes 2) + (\frac{1}{33} \otimes 2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{22} + \frac{1}{66}.$$

Nous « retrouvons » ces expressions des *doublements éventuels* dans la *Tablette JE 25 368 du Musée du Caire*[15] ainsi que dans le *Papyrus grec Michigan 621*, la *Tablette grecque de bois AF 1196* [3] *du Musée du Louvre*[16] ainsi que dans le *Papyrus byzantin d'Akmîm* (mais seulement pour le quadruple). En revanche, dans le papyrus démotique précité, pour le quadruple, nous avons 1/4 1/11 1/44, preuve, sans doute, de son obtention à partir de la division de 4 par 11 en utilisant les *dédoublements successifs*.

## DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 11

Le début du texte relatif au calcul ne nous est pas parvenu. Toutefois, il semble assuré que la division de 2 par 11 y figurait. Or, à la première ligne du texte de l'exercice R2/11, nous pouvons lire les *expressions de 2 à partir de 11*. Nous en déduisons que le *quantième principal* est égal à 1/6. Par suite, théoriquement, pour parvenir aux expressions données par l'Auteur, nous devons utiliser les *multiplicateurs ternaires*. Nous proposons de procéder comme suit :

---

7 Nous donnons d'abord la nouvelle côte puis l'ancienne. Voir Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments, p. 93 ; http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk/lahun/ucarchivelahun/uc32159-f.jpg.

8 Daressy, 1906, Calculs égyptiens du Moyen Empire, p. 67.

9 Voir, par exemple, Karpinski, 1922, Michigan Mathematical Papyrus N°. 621.

10 Hultsch, 1901, Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, p. 182.

11 Voir, par exemple, Cauderlier, 1983, Cinq tablettes en bois au Musée du Louvre, p. 272.

12 Baillet, 1892, Le Papyrus mathématique d'Akhmîm, p. 81.

13 Voir, par exemple, Robins, 1923, A Greco-Egyptian mathematical papyrus, p. 332.

14 Léonard de Pise, (1857), *Liber abacci*, p. 80.

15 Daressy, 1906, Calculs égyptiens du Moyen Empire, p. 67. Voir aussi notre annexe DT : Les tablettes CG 25367 et CG 25368 du Musée du Caire, pp. 17-19.

16 Voir, par exemple, Cauderlier, 1983, Cinq tablettes en bois au Musée du Louvre, p. 272.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 11 | (initialisation) |
| 2/3 | 7  1/3 | (« table de deux-tiers ») |
| 1/3 | 3  2/3 | (dédoublement et réduction de 1/2  1/6 en 2/3) |
| 1/6 | 1  1/2  1/3 | (dédoublement) |
| \  1/6 | 1  2/3  1/6 | (réduction de 1/2  1/3 en 2/3  1/6) |
| Manque | 1/6 | **($2_{11}$)** |
| \  1/66 | 1/6 | (inversion-multiplication) |

Nous avons suivi la procédure que nous lisons en R2/17 et R2/23 où l'Auteur a donné des expressions différentes de la première ligne, privilégiant ainsi le seul calcul aux dépens de l'*expression secondaire principale* correspondante. Ici, ceci revient à opérer la réduction de 1/2  1/3 en 2/3  1/6. Cette réduction peut correspondre à la suite d'égalités suivante :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{6})=(\frac{1}{2}+\frac{1}{6})+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}.$$

Quant à la multiplication auxiliaire de 11 par 6, elle est élémentaire, puisqu'elle peut s'effectuer facilement à l'aide de *doublements successifs* :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 11 | (initialisation) |
| | \  2 | 22 | (doublement) |
| | \  4 | 44 | (doublement) |
| Total | 6 | 66 | |

VÉRIFICATION

Théoriquement, l'*expression secondaire principale* peut être considérée comme étant le résultat de la division de 11 par 6. Selon la procédure employée, elle peut donc avoir diverses formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* où les quantièmes de cette expression sont des multiples du *quantième principal*, nous pouvons distinguer les deux décompositions suivantes :

$$Q=\frac{11}{6}=1+\frac{5}{6}=$$

$$=1+\frac{4+1}{6}=1+\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\ ;$$

$$=1+\frac{3+2}{6}=1+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

La première décomposition, qui correspond à l'*expression secondaire principale*, donne lieu à une vérification plus aisée car il suffit d'utiliser les seuls *multiplicateurs ternaires* :

| | | |
|---|---|---|
| \ 1 | 6 | (initialisation) |
| \ 2/3 | 4 | (« table de deux-tiers ») |
| 1/3 | 2 | (dédoublement) |
| \ 1/6 | 1 | (dédoublement) |
| Total | 11 | |

Toutefois, sans la connaissance de ce résultat, une autre possibilité peut être envisagée. Elle revient à commencer par un dédoublement :

| | | |
|---|---|---|
| \ 1 | 6 | (initialisation) |
| \ 1/2 | 3 | (dédoublement) |
| \ 1/3 | 2 | (inversion) |
| Total | 11 | |

Bien sûr, nous obtenons ainsi un résultat différent, mais il suffit de transformer 1/2  1/3 en 2/3  1/6 pour retrouver l'*expression secondaire principale* donnée par l'Auteur.

OBTENTION DU MANQUE

L'obtention du *manque* peut soulever quelques questions qui, ici, sont principalement dues aux restitutions que nous pouvons proposer. En effet, l'Auteur donne 2/3  1/6 comme *expression secondaire principale*. Nous sommes parvenus facilement à ce résultat lors de la vérification ci-dessus. En revanche, lors de la division, le multiplicateur 1/6 peut conduire au résultat 1/2  1/3. Quoiqu'il en soit, l'obtention du *manque* est immédiate dans les deux cas tout en donnant lieu à l'utilisation de relations différentes :

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},$$

conduisant respectivement à

$$(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{6})+\frac{1}{6}=1+\frac{2}{3}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{6})=1+(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})=1+1=2,$$

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+\frac{1}{6}=1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=1+1=2.$$

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/11

Le nombre 11 étant premier, il existe une seule *décomposition de 2/11 en deux quantièmes distincts*[17], la décomposition *primaire*[18] :

$$\textbf{(DP}_{11}\textbf{)}\quad \frac{2}{11}=\frac{2}{11+1}+\frac{2}{11\times(11+1)}=\frac{2}{12}+\frac{2}{11\times 12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{11\times 6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}\,.$$

C'est celle que nous déduisons des expressions données par l'Auteur :

$$\textbf{(d}_{11}\textbf{)}\quad \frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}\qquad \text{avec}\qquad \textbf{(2}_{11}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{6})+\frac{1}{6}.$$

Il existe des décompositions de 2/11 en trois ou quatre quantièmes. Citons, par exemple, l'unique *décomposition égyptienne simple* en trois quantièmes

$$\textbf{(A}_{11}\textbf{)}\quad \frac{2}{11}=\frac{1}{8}+\frac{1}{22}+\frac{1}{88}=\frac{1}{8}+\frac{1}{11\times 2}+\frac{1}{11\times 8}\qquad \text{avec}\qquad 2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\,.$$

Son *quantième principal* étant *binaire*, nous pouvons l'obtenir en divisant 2 par 11 à l'aide du procédé des *dédoublements successifs* :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 11 | (initialisation) |
| 1/2 | 5 1/2 | (dédoublement) |
| 1/4 | 2 1/2 1/4 | (dédoublement) |
| \ 1/8 | 1 1/4 1/8 | (dédoublement) |
| Manque | 1/2 1/8 | **(2$_{13}$)** |
| \ 1/22 | 1/2 | (inversion-multiplication) |
| \ 1/88 | 1/8 | (inversion-multiplication) |

Quant *aux doublements éventuels*, en utilisant la décomposition **(A$_{11}$)**, nous avons :

$$\frac{1}{11}\times 4=(\frac{1}{11}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{8}+\frac{1}{22}+\frac{1}{88})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 4}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 11}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 44}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{44}\;;$$

$$\frac{1}{11}\times 8=(\frac{1}{11}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{44})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 2}\otimes 2)+(\frac{1}{11}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 22}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{2}+(\frac{1}{8}+\frac{1}{22}+\frac{1}{88})+\frac{1}{22}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+(\frac{1}{22}+\frac{1}{22})+\frac{1}{88}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{88}\,.$$

La dernière expression est assez complexe. Autrement dit, si nous considérons seulement, l'aspect pratique des *doublements éventuels*, la décomposition **(A$_{11}$)** est peu utile.

[17] Voir l'annexe E 6 : décompositions théoriques en deux quantièmes distincts.
[18] Voir aussi l'annexe E 7 : décompositions primaires.

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/11 et de 8/11 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

| | **($d_{11}$)** | **($A_{11}$)** |
|---|---|---|
| 4/11 | 2 | 3 |
| 8/11 | 3 | 4 |

EN GUISE DE CONCLUSION

L'Auteur a donné des expressions que nous pouvons traduire, aujourd'hui, sous la forme d'une *décomposition primaire*. Toutefois, comme nous le montre le faible nombre de telles décompositions associées aux expressions trouvées dans le *Papyrus Rhind*, il ne s'agit pas de l'application d'une règle conduisant à cette forme particulière. Ici, c'est une certaine pratique, à savoir, la division et l'utilisation des *multiplicateurs ternaires*, qui permet d'obtenir de telles expressions.

Avec toutes les précautions d'usage, il nous semble que les expressions données par l'Auteur sont les « meilleures » : nombre minimal de quantièmes, inverses de nombres pairs et multiples de trois, obtention aisée par division et *multiplicateurs ternaires*, *manque* immédiat, quantièmes assez grands et enfin application aisée pour les *doublements éventuels*.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 8.
Baillet, 1892, Le Papyrus mathématique d'Akhmîm, p. 81.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. I.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 82, 85, 88.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, pp. 256, 258.
Cantor, 1907, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, p. 66.
Cauderlier, 1983, Cinq tablettes en bois au Musée du Louvre, p. 272.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 28, 82.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. I, pl. 3.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 51.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 123, 327.
Daressy, 1906, Calculs égyptiens du Moyen Empire, p. 67.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 36, pl. I.
Giacardi, Roero, 1979, *La matematica delle civiltà arcaiche, Egitto, Mesopotamia, Grecia*, pp. 77-78.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 133.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 55.
Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 294.
Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, pp. 202, 207.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 105, 111.
Hultsch, 1901, Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, p. 182.
Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments : UC 32114B, UC 32118B, UC 32134A+B, UC 32159-UC 32162, *in* Collier, Quirk, 2004, *The UCL Lahun Papyri*, pp. 92-93.

Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 140, 166.
Léonard de Pise, (1857), *Liber abacci*, p. 80.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp.99, 101.
Midonick, 1968, *The Treasury of Mathematics*, p. 85.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 39, pl. A.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* $I_5$, 85.
Ritter, 2000, Egyptian mathematics *in* Selin, 2000, *Mathematics across cultures*, pp. 129-131.
Robins, 1923, A Greco-Egyptian mathematical papyrus, p. 332.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 1-2.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 331.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363, 368, 377, 380-381.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, pp. 24-25.
Van der Waerden, 1980, The (2: n) Table in the Rhind Papyrus, pp. 266, 270.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 117.
Vogel, 1929, Erweitert die Lederrolle unsere Kenntnis ägyptischer Mathematik ? p. 404.