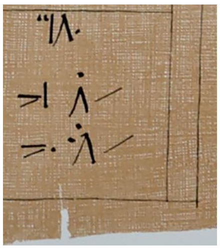
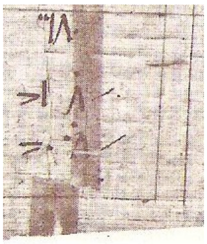
Expressions de 2 à partir de 15

Nous retrouvons les marques de certaines brisures et des différents travaux de restauration que nous avons signalés dans notre introduction à l'exercice R2/11.



Fac-similé[1]



Chace[2]

G. Robins ; C. Shute[3]

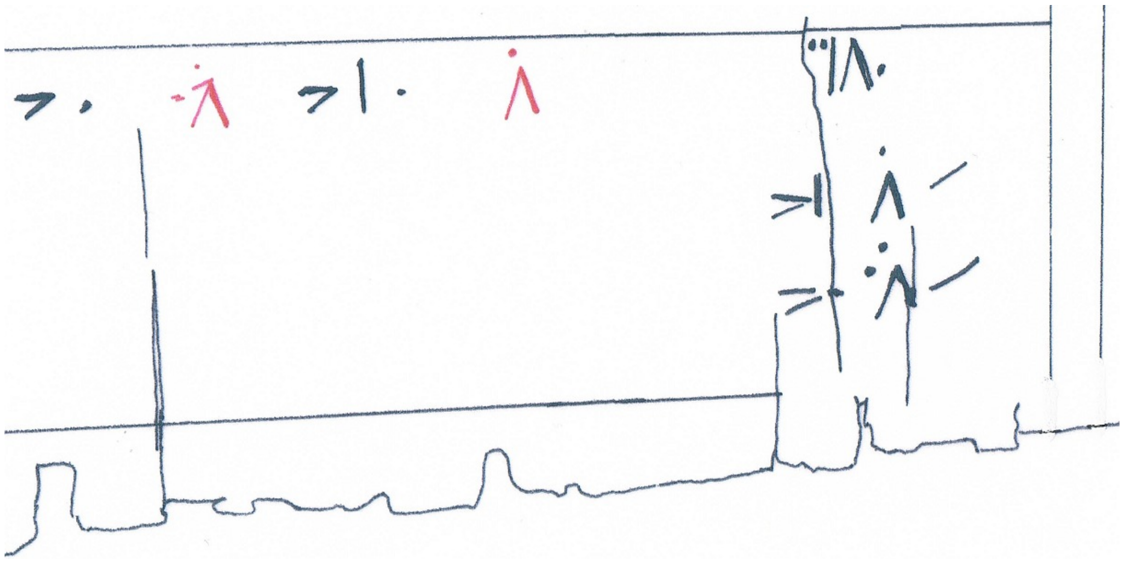
Site BM

La brisure verticale qui court sur le début du texte et qui s'achève, en fin de page, par un manque plus important suit celle qui figurait précédemment. Ici aussi, l'auteur du *Fac-similé* publié par le British Museum, ne la signale pas dans le corps du texte. Pourtant, elle figure sur les reproductions photographiques qui en ont été faites. Elle passe seulement, à la dernière ligne, près du point précédent le signe du demi dont les deux traits obliques ne se rejoignent pas. Nous pouvons noter que les dernières reproductions semblent indiquer que lors de la dernière restauration, le support droit a été remonté : le placement de ce point en est la preuve.

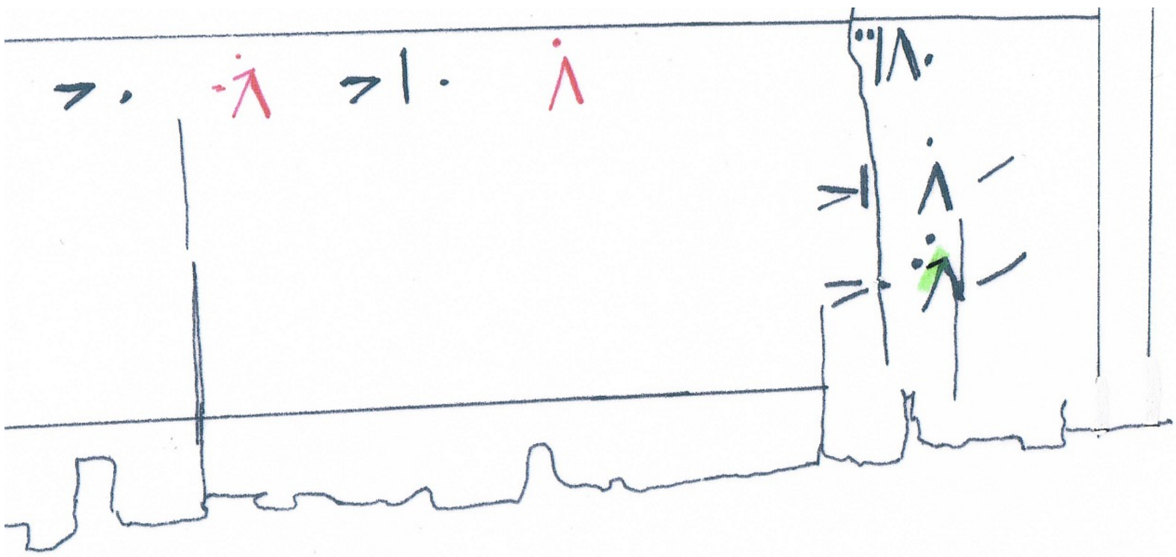
Contrairement à l'exercice R2/11, les collages qui courent ici, sur toute la largeur de la bande où figure R2/13, n'ont pas eu d'effet notable sur les débuts des diverses lignes : voir la reproduction photographique donnée dans la réédition abrégée de l'ouvrage de l'équipe formée autour de Arnold Buffum Chace[4]. Toutefois, les dernières reproductions publiées par le British Museum, semblent mieux montrer le raccord des bords qui ont été rapprochés.

[1] British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. I.
[2] Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 82.
[3] Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 1.
[4] Pour la première édition, voir Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. I. Les reproductions photographiques données dans les deux éditions sont différentes. Pour l'illustration ci-dessus, la meilleure qualité de celle publiée dans la réédition abrégée nous a conduits à la retenir.

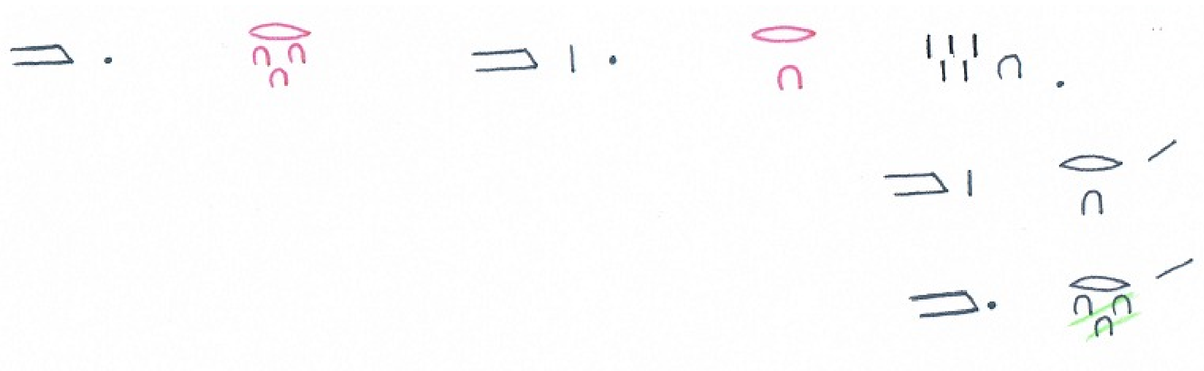
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



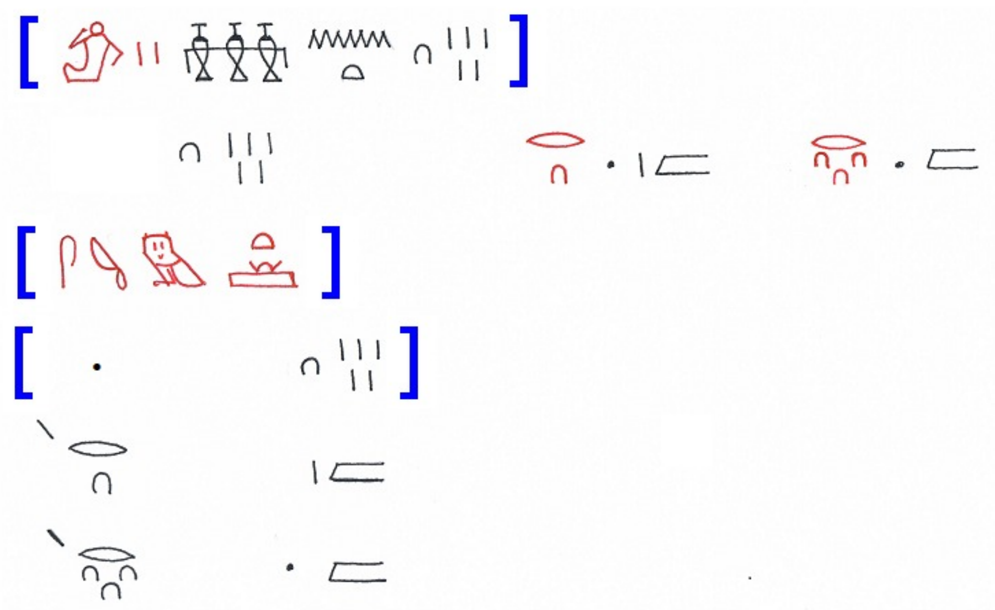
Restitutions



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L₁ · *15* ***10'*** *· 1 2'* ***30'*** *· 2'*
L₂ *\ 10' 1 2'*
L₃ *\ 30' · 2'*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L₁ · *15* ***10'*** *· 1 2'* ***30'*** *· 2'*
L₂ *\ 10' 1 2'*
L₃ *\ 30' · 2'*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L₁ · 15 **10'** · 1 2' **30'** · 2'
L₂ \ 10' 1 2'
L₃ \ 30'[1] · 2'[2]

1 — Sans doute, comme pour le texte de l'exercice R2/13, les travaux de restauration ou de consolidation ont amené quelques « manques ». Ici, une brisure verticale affecte l'écriture du chiffre 30 : le trait vers la gauche au-dessus du v renversé qui est, pour Âhmès, une partie intégrante de ce chiffre est très peu visible sur les dernières reproductions photographiques. Voir l'introduction à cet exercice.

2 — Une autre brisure passe entre le point et le sommet idéal du signe indiquant le demi. Voir l'introduction à cet exercice.

TRADUCTION

//$_1$	·	15	**10’**	1	2’	**30’**	2’
//$_2$	\	10’	1 2’				
//$_3$	\	30’	2’				

ADAPTATION

[**Exprime 2** à partir de 15]

15 **1/10** 1 1/2 **1/30** 1/2

[**Calcul**]

	[1	15]
\	1/10	1 1/2
\	1/30	1/2

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 15

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 15* sont :

$$\textbf{(d}_{15}\textbf{)} \quad \frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_{15}\textbf{)} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}.$$

On trouve la même décomposition de 2/15 dans le *Fragment UC 32159-f = K IV. 2 de El-Lahoun* [5] de l'University College de Londres, dans le *Papyrus Michigan* 621 [6] et dans le *Papyrus byzantin d'Akmîm*[7]. L'Auteur l'utilise implicitement dans l'exemple R 30. En revanche dans un papyrus démotique écrit à l'époque romaine[8] nous lisons la décomposition 1/8 1/120.

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant **(d$_5$)** et **(d$_{15}$)** ainsi que certaines simplifications, nous obtenons des décompositions de 4/15 et de 8/15 qui sont en deux quantièmes :

$$\frac{1}{15} \times 4 = (\frac{1}{15} \otimes 2) \otimes 2 = (\frac{1}{10} + \frac{1}{30}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 5} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 15} \otimes 2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{15},$$

$$\frac{1}{15} \times 8 = (\frac{1}{15} \times 4) \otimes 2 = (\frac{1}{5} + \frac{1}{15}) \otimes 2 = (\frac{1}{5} \otimes 2) + (\frac{1}{15} \otimes 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}.$$

En effet, cette dernière expression peut être simplifiée de deux manières :

$$\frac{1}{15} \times 8 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3} + (\frac{1}{10} + \frac{1}{15}) + \frac{1}{30} = (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) + \frac{1}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{30},$$

$$\frac{1}{15} \times 8 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3} + (\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}.$$

La simplification de 1/3 1/6 en 1/2 est fondamentale tandis que celle de 1/10 1/15 1/30 en 1/5 peut relever de divers calculs, en particulier de la réduction de 1/15 1/30 en 1/10, relation que l'on trouve, par exemple, dans le *Rouleau de cuir*. Mais ces sortes de simplification ne peuvent pas être généralisées pour les autres « multiples de trois ».

	Papyrus démotique	Papyrus Michigan 621	Papyrus d'Akhmîm
2/15	1/8 1/120	1/10 1/30	1/8 1/120
4/15	1/5 1/15	1/5 1/15	1/4 1/60
8/15		1/3 1/5	1/2 1/30

[5] Nous donnons d'abord la nouvelle côte puis l'ancienne. Voir Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments, p. 93 ; http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk/lahun/ucarchivelahun/uc32159-f.jpg.

[6] Robins, 1923, A Greco-Egyptian mathematical papyrus, p. 333.

[7] Baillet, 1892, Le Papyrus mathématique d'Akhmîm, p. 29.

[8] Hultsch, 1901, Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, p. 184.

DIVISIONS COMMENTÉES DE 2 PAR 15

En quelque sorte, la présentation « *verticale* » ne diffère guère de la présentation « *horizontale* » constituée par la première ligne du texte écrit par Âhmès. La plupart des textes des *expressions de deux à partir d'un entier* sont de cette nature. Par conséquent, il nous est difficile de savoir comment un scribe pourrait effectuer la division de 2 par le nombre entier considéré. Ici, deux pistes sont possibles. La première peut être située dans le cadre d'une certaine pratique liée au caractère particulier du nombre concerné, à savoir, 15. C'est un multiple du nombre 5 et le calculateur égyptien peut opter pour la *division par dix*. Nous pouvons alors avoir la division commentée suivante :

1	15	(initialisation)
\ 1/10	1 1/2	(division par dix)
Manque	1/2	**(2_{15})**
\ 1/30	1/2	(inversion-multiplication)

Autrement dit, si l'Auteur avait agi de la sorte, l'écrit d'Âhmès serait assez complet puisque seule l'initialisation serait absente, ce qui arrive même lorsqu'il donne des présentations détaillées de la division de 2 par l'entier considéré.

Par ailleurs, nous pouvons nous situer dans une perspective qui peut être liée à un certain secret. Cette fois, l'Auteur aurait volontairement oublié d'omettre le ressort essentiel de la procédure générale pour les « multiples de trois », à savoir, l'introduction du multiplicateur deux-tiers. La division commentée aurait alors la forme suivante :

1	15	(initialisation)
2/3	10	(« table de deux-tiers »)
\ 1/10	1 1/2	(inversion)
Manque	1/2	**(2_{15})**
\ 1/30	1/2	(inversion-multiplication)

Comme Âhmès écrit le multiplicateur deux-tiers pour tous les autres « multiples de trois », nous pouvons penser que cette présentation n'est pas conforme à la pensée de l'Auteur, d'où notre préférence pour la première option.

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/15

Le nombre 15 étant le produit de deux nombres premiers distincts, à savoir 3 et 5, il existe trois autres *décompositions* de 2/15 en deux quantièmes distincts :

$$\textbf{(A}_{15}\textbf{)} \quad \frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + \frac{1}{8},$$

(B_{15}) $\frac{2}{15}=\frac{1}{9}+\frac{1}{15}$ avec $2=(1+\frac{2}{3})+\frac{1}{3}$,

(C_{15}) $\frac{2}{15}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ avec $2=(1+\frac{1}{4})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$.

Il existe aussi une seule *décomposition égyptienne simple* en trois termes :

(D_{15}) $\frac{2}{15}=\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{1}{12}+\frac{1}{15\times 2}+\frac{1}{15\times 4}$ avec $2=(1+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

La décomposition **(A_{15})** est *primaire*

(DP_{15}) $\frac{2}{15}=\frac{2}{15+1}+\frac{2}{15\times(15+1)}=\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})+\frac{1}{8}$.

Son *quantième principal* étant *binaire*, elle peut être facilement obtenue en divisant 2 par 15 à l'aide de *dédoublements successifs* :

1	15	(initialisation)
1/2	7 1/2	(dédoublement)
1/4	3 1/2 1/4	(dédoublement)
\ 1/8	1 1/2 1/4 1/8	(dédoublement)
Manque	1/8	**(2_{13})**
\ 1/120	1/8	(inversion-multiplication)

Puisque les quantièmes sont des sous-multiples du *quantième binaire* 1/8, les *doublements éventuels* sont immédiats :

$$\frac{1}{15}\times 4=(\frac{1}{15}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{8}+\frac{1}{120})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 4}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 60}\otimes 2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{60},$$

$$\frac{1}{15}\times 8=(\frac{1}{15}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{4}+\frac{1}{60})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 2}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 30}\otimes 2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{30}.$$

Rappelons que dans un papyrus démotique écrit à l'époque romaine[9] nous lisons la décomposition 1/8 1/120.

Théoriquement, la décomposition

(B_{15}) $\frac{2}{15}=\frac{1}{9}+\frac{1}{15}$,

est une *décomposition de type « multiple de cinq »*. En effet, nous avons :

($DM5_{15}$) $\frac{2}{15}=\frac{2}{5\times 3}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=(\frac{1}{3}+\frac{1}{15})\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3\times 3}+\frac{1}{15\times 3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{45}$.

Il en résulte la décomposition de deux, à savoir, **(2_5)** et la procédure suivante pour diviser 2 par 15 :

1	15	(initialisation)

[9] Hultsch, 1901, Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, p. 184.

	1/5	3	(division par cinq)
	1/3	5	(inversion)
	2/3 de 1/3	3 1/3	(« table de deux-tiers » et réduction de 1/2 1/6 en 2/3)
	1/3 de 1/3	1 2/3	(dédoublement)
\	1/9	1 2/3	(multiplication-réduction)
	Manque	1/3	**(2_5)**
\	1/45	1/3	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, en utilisant les « multiples de trois », les exercices R2/5 et R2/15 et en effectuant certaines simplifications qui, par ailleurs, sont sans doute inconnues des scribes égyptiens, nous avons :

$$\frac{1}{15}\times 4 = (\frac{1}{15}\otimes 2)\otimes 2 = (\frac{1}{9}+\frac{1}{45})\otimes 2 = (\frac{1}{3\times 3}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 15}\otimes 2) = \frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{30}+\frac{1}{90} =$$

$$= (\frac{1}{6}+\frac{1}{30})+(\frac{1}{18}+\frac{1}{90}) = \frac{1}{5}+\frac{1}{15}\ ;$$

$$\frac{1}{15}\times 8 = (\frac{1}{15}\times 4)\otimes 2 = (\frac{1}{5}+\frac{1}{15})\otimes 2 = (\frac{1}{5}\otimes 2)+(\frac{1}{15}\otimes 2) = \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{9}+\frac{1}{45} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}.$$

Théoriquement, la décomposition

$$\textbf{(C}_{\textbf{15}}\textbf{)}\qquad \frac{2}{15} = \frac{1}{12}+\frac{1}{20},$$

est *composée*. Elle utilise le fait que le nombre 15 est le produit des nombres 3 et 5.

$$\textbf{(DC}_{\textbf{15}}\textbf{)}\qquad \frac{2}{15} = \frac{2}{3\times 5} = \frac{2}{3\times(3+5)}+\frac{2}{5\times(3+5)} = \frac{1}{12}+\frac{1}{20}.$$

Ses quantièmes sont *binaires* de telle sorte que nous pouvons trouver les *expressions secondaires* correspondantes en effectuant les divisions de 15 respectivement par 12 et 20 à l'aide de *dédoublements successifs* :

\	1	12		1	20
	1/2	6	\	1/2	10
\	1/4	3	\	1/4	5

$$15:12 = 1+\frac{1}{4} \qquad\qquad 15:20 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

Ainsi nous avons la décomposition suivante de deux

$$2 = (1+\frac{1}{4})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}).$$

Les doublements sont immédiats :

$$\frac{1}{15}\times 4 = (\frac{1}{15}\otimes 2)\otimes 2 = (\frac{1}{12}+\frac{1}{20})\otimes 2 = (\frac{1}{2\times 6}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 10}\otimes 2) = \frac{1}{6}+\frac{1}{10}\ ;$$

$$\frac{1}{15}\times 8 = (\frac{1}{15}\times 4)\otimes 2 = (\frac{1}{6}+\frac{1}{10})\otimes 2 = (\frac{1}{2\times 3}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 5}\otimes 2) = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}.$$

Le *quantième principal* de l'unique *décomposition égyptienne simple* en trois termes

(D$_{15}$) $\frac{2}{15}=\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{1}{12}+\frac{1}{15\times 2}+\frac{1}{15\times 4}$ avec $2=(1+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$,

étant le même que celui de la décomposition précédente, nous pouvons considérer qu'elle revient, théoriquement, à moins bien écrire le *manque*. Toutefois, pratiquement, les procédures pour les obtenir sont distinctes. Au lieu de l'utilisation des *quantièmes binaires*, cette fois, ce sont les *multiplicateurs ternaires* qui doivent être retenus du fait de la nature du *quantième principal*, à savoir, 1/12. Un scribe pourrait opérer de la manière suivante :

1	15	(initialisation)
2/3	10	(« table de deux-tiers »)
1/3	5	(dédoublement)
1/6	2 1/2	(dédoublement)
\ 1/12	1 1/4	(dédoublement)
Manque	1/2 1/4	**(2$_{15}$)**
\ 1/30	1/2	(inversion-multiplication)
\ 1/60	1/4	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, en utilisant l'expression **(D$_{15}$)** nous avons :

$$\frac{1}{15}\times 4 = (\frac{1}{15}\otimes 2)\otimes 2 = (\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60})\otimes 2 = (\frac{1}{2\times 6}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 15}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 30}\otimes 2) =$$
$$\frac{1}{6}+(\frac{1}{15}+\frac{1}{30}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{15}\times 8 = (\frac{1}{15}\times 4)\otimes 2 = (\frac{1}{6}+\frac{1}{10})\otimes 2 = (\frac{1}{2\times 3}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 5}\otimes 2) = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}.$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/15 et de 8/15 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications peu classiques) :

	(d$_{15}$)	**(A$_{15}$)**	**(B$_{15}$)**	**(C$_{15}$)**	**(D$_{15}$)**
4/15	2	2	2	2	2
8/15	**<u>2</u>**	2	**<u>2</u>**	2	2

EN GUISE DE CONCLUSION

Les études que nous venons de mener montrent certaines difficultés pour saisir les intentions de l'Auteur. Comme en R2/9, la nature particulière du *quantième principal*, ici, décimale, a pu résulter de certaines considérations comme celle de l'utilisation de la *division par dix* due au fait que le nombre 15 est un multiple de 5. Ainsi, nous ne pouvons pas savoir si l'Auteur, par un certain goût du secret, n'a pas voulu indiquer l'origine générale du *quantième principal*, à savoir, le nombre 15 qui est un multiple de trois. Dès lors, selon les voies plus ou moins choisies, l'Auteur est amené à donner des expressions que nous pouvons placer dans un cadre général, celui des « multiples de trois ». Mais la mise en œuvre d'autres procédures lui aurait permis d'obtenir d'autres expressions telles les *décompositions primaires* ou *composées* qui conduisent, ici, à des expressions moins complexes pour les *doublements éventuels*.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 9, 12.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, p. 88.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, p. 255.
Cantor, 1907, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, p. 61.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 51.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. I, pl. 4.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 28, 82.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 123, 327.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 37, pl. I.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 134.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 55.
Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 293.
Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 202.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, p. 131.
Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments : UC 32114B, UC 32118B, UC 32134A+B, UC 32159-UC 32162, *in* Collier, Quirk, 2004, *The UCL Lahun Papyri*, pp. 92-93.
Hultsch, Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung, pp. 38,70, 123-4.
Hultsch, 1901, Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, p. 184.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 138, 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 102.
Midonick, 1968, *The Treasury of Mathematics*, p. 88.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 39, pl. A.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_7, p. 86.
Ritter, 2000, Egyptian mathematics *in* Selin, 2000, *Mathematics across cultures*, pp. 129-131.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 1-2.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 335.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, p. 366.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 24.
Van der Waerden, 1980, The (2: n) Table in the Rhind Papyrus, p. 269.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 117.
Vogel, 1929, Erweitert die Lederrolle unsere Kenntnis ägyptischer Mathematik ? p. 399.