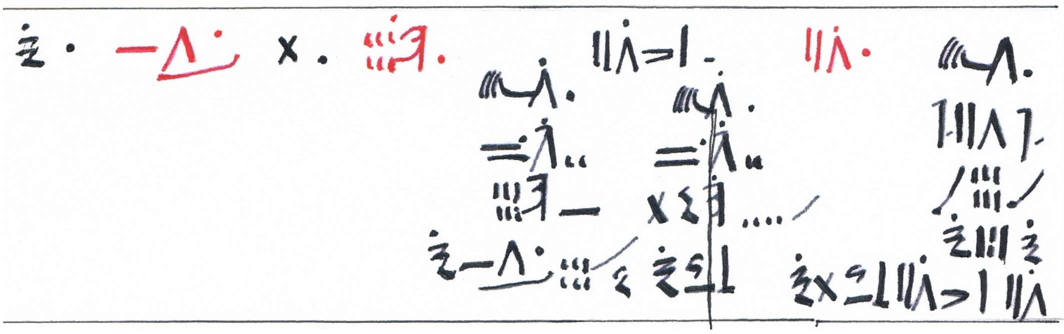
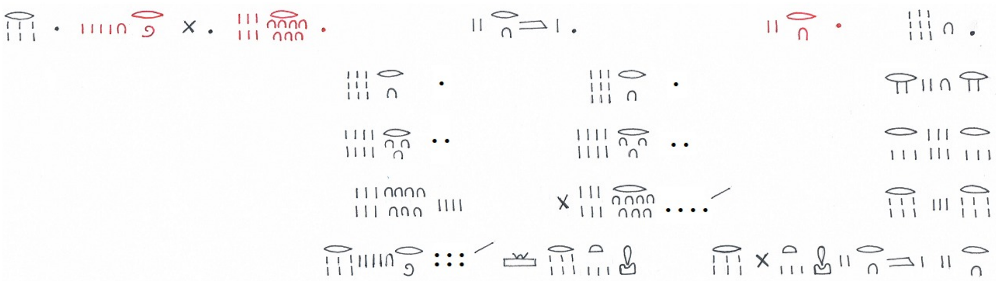
Expressions de 2 à partir de 19

Nous voyons une fine brisure verticale qui affecte faiblement les trois dernières lignes de la deuxième partie du calcul. L'auteur du *Fac-similé*[1] publié par le British Museum ainsi que l'équipe formée autour de Chace[2] en font état. Comme tous les traducteurs du *Papyrus Rhind*, nous avons considéré qu'il n'y avait pas lieu de la retenir dans nos translittérations hiéroglyphiques et par suite, dans notre traduction et notre adaptation.

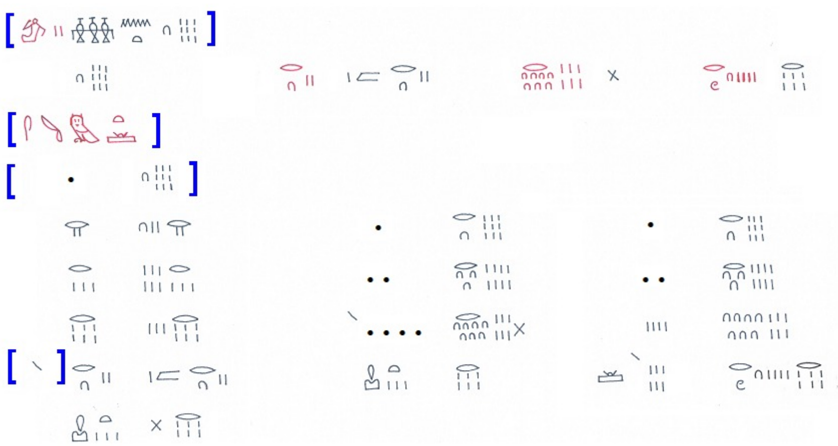
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

[1] British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. II.
[2] Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. II.

L1	· 19	**· 12’** · 1 2’ 12’		**· 76’** · 4’ **114’** · 6’
L2	3’’ 12 3’’	1 19’	1 19’	
L3	3’ 6_1 3’	2 38’	2 38’	
L4	6’ 3 6’	\ 4 76’ 4’	4 76	
L5	12’ 1 2’ 12’ DA.t 4’ 6’	DA.t 6’ dmd \ 6 114’ 6’		

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L1	· 19	**· 12’** · 1 2’ 12’		**· 76’** · 4’ **114’** · 6’
L2	3’’ 12 3’’	1 19’	1 19’	
L3	3’ 6 3’	2 38’	2 38’	
L4	6’ 3 6’	\ 4 76’ 4’	4 76	
L5	12’ 1 2’ 12’ djat 4’ 6’	djat 6’ démèd \ 6 114’ 6’		

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 · 19 **· 12’** · 1 2’ 12’ **·[1] 76_1’** · 4’ **114’** · 6_3’

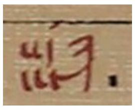
L_2 3’’ 12 3’’ 1_1 19’ 1_1 19’

L_3 3’ 6 3’ 2_1 38’ 2_1 38’

L_4 6_3’ 3 6_3’ \ 4_1 76_2’ 4’ 4[2] 76[3]

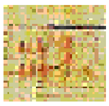
L_5 12’ 1 2’ 12’ $djat_1$ 4’ 6_3’ $djat_1$ 6_3’ $démèd_1$ \ 6 114’ 6_3’

1 — Selon Chace « *the dot before the red fraction 1/76 in line 1 on the plate seems to have been made in black and then corrected to red* [3]». Curieusement, Eisenlohr le translittère en rouge alors que dans le *Fac-similé* il est reproduit en noir. De même, il semble être écrit en rouge dans la reproduction photographique publiée par G. Robins et C. Shute et en noir dans celle que l’on trouve sur le site du British Museum.



Fac-similé[4]

Eisenlohr[5]



G. Robins ; C. Shute[6]

Site BM

2 — Dans la même ligne et dans le même cadre opératoire, Âhmès écrit le chiffre 4 sous la forme des quatre points puis de la barre horizontale, preuve que ces signes numériques de « sommation » n’ont pas une écriture fixée une fois pour toutes[7].

3 — Pour la multiplication auxiliaire, comme en R2/17, Âhmès utilise des quantièmes sauf ici où il met un entier. Seul Eisenlohr met le signe du quantième. En le conservant, les autres auteurs semblent être trop heureux de trouver un entier !

4 — L’indexation des diverses notations numériques est délicate. En particulier, il est difficile de distinguer les écritures à l’aide de points de celles qui utilisent des traits verticaux. C’est ici le cas pour le chiffre 6. Nous pouvons penser que, dans la dernière ligne, le scribe a écrit le chiffre 6 de « sommation » à l’aide de six points, alors qu’il a utilisé précédemment les barres pour l’entier 6 et la ligature « classique » du 6 pour le quantième 1/6.

[3] Chace, 1927-9, *The Rhind Mathematical Papyrus*, 2 divided by 19, pl. 6.
[4] British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. II.
[5] Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, pl. II.
[6] Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 2-3.
[7] Voir l’annexe E 5 : chiffres dans les expressions de deux.

TRADUCTION

//₁	·	19	**12’**	1 2’ 12’	**76’**	4’		**114’**	6’	
//₂	3’’	12 3’’		1	19’			1	19’	
//₃	3’	6 3’		2	38’			2	38’	
//₄	6’	3 6’		\ 4	76’	4’		4	76	
//₅	12’	1 2’ 12’	Manque 4’ 6’	Manque	6’		Total \	6	114’	6’

ADAPTATION

[**Exprime 2** à partir de 19]

19	**1/12**	1 1/2 1/12	**1/76**	1/4	**1/114**	1/6

[Calcul]

	[1	19]	1	1/19		1	1/19	
	2/3	12 2/3	2	1/38		2	1/38	
	1/3	6 1/3	\ 4	1/76	1/4	4	76	
	1/6	3 1/6		Manque	1/6	Total \ 6	1/114	1/6
[\]	1/12	1 1/2 1/12						
Manque		1/4 1/6						

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 19

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 19* sont :

$$\textbf{(d}_{19}\textbf{)}\quad \frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_{19}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12})+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}.$$

Comme pour tous les nombres impairs inférieurs à 21, cette expression du double du quantième 1/19 figure dans le *Fragment UC 32159-f = K IV. 2 de El-Lahoun* [8] de l'University College de Londres. En revanche, dans le *Papyrus byzantin d'Akhmîm*[9], nous trouvons l'unique expression de 2/19 en deux quantièmes distincts, à savoir, la décomposition primaire :

$$\textbf{(DP}_{19}\textbf{)}\quad \frac{2}{19}=\frac{1}{10}+\frac{1}{190}.$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant **(d$_{57}$)**, nous obtenons des décompositions de 4/19 et de 8/19 qui sont ainsi respectivement en trois et quatre quantièmes :

$$\frac{4}{19}=\frac{2}{19}\otimes 2=(\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 6}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 38}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 57}\otimes 2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{38}+\frac{1}{57}\ ;$$

$$\frac{1}{19}\times 8=(\frac{1}{19}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{6}+\frac{1}{38}+\frac{1}{57})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 3}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 19}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 19}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{19}+\frac{1}{38}+\frac{1}{114}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 19

Le *quantième principal* est égal à 1/12. Il est *ternaire*. Par suite, théoriquement et pratiquement, pour parvenir aux expressions données par l'Auteur, nous sommes conduits à effectuer la division de 2 par 19 en utilisant les *multiplicateurs ternaires* et procéder, comme l'Auteur nous y invite, de la manière suivante :

1	19	(initialisation)
2/3	12 2/3	(« table de deux-tiers »)
1/3	6 1/3	(dédoublement)
1/6	3 1/6	(dédoublement)
\ 1/12	1 1/2 1/12	(dédoublement)
Manque	1/4 1/6	**(2$_{19}$)**
\ 1/76	1/4	(inversion-multiplication)
\ 1/114	1/6	(inversion-multiplication)

8 Nous donnons d'abord la nouvelle côte puis l'ancienne. Voir Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments, p. 93 ; http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk/lahun/ucarchivelahun/uc32159-f.jpg.

9 Baillet, 1892, *Le Papyrus mathématique d'Akhmîm*, p. 31.

Par rapport à l'exercice R2/17, où Âhmès introduit pour la première fois le mot *djat* (DA.t) (que nous rendons par *manque*), nous avons ici une meilleure explicitation de son utilisation : chaque quantième figurant dans le *manque* donne lieu à une procédure particulière.

Pour la première fois, le mot *total* apparaît, mais avec une certaine ambiguïté car il peut s'appliquer à la fois à la multiplication de 19 par 6 et à la division de 2 par 19. Les multiplications de 19 par 4 et 6 auraient pu être présentées comme suit :

1	19	(initialisation)		1	19
2	38	(doublement)		\ 2	38
\ 4	76	(doublement)		\ 4	76
			Total	6	114

Chacune de ces multiplications se termine par ce qui devrait figurer dans la division de 2 par 19. Ainsi, après la première, Âhmès prend soin d'écrire qu'il y a encore un *manque* égal à 1/6. Le *total* qui figure à la fin est donc celui qui correspond à la division.

Notons qu'Abdulrahman Abdulaziz remarque que le *manque*, qu'il note *R*, de l'exercice R2/17 est égal à la partie fractionnaire de l'*expression secondaire principale* de 2/19, à savoir, 7/12, et que, pour ces deux cas, Âhmès en donne des expressions différentes. Oubliant l'aspect opératoire du problème, il se contente d'affirmer « *All of this shows that keeping the terms of R less than 10 was an essential part of determining how 2:*n *is to be decomposed*[10]».

VÉRIFICATION

Théoriquement, l'*expression secondaire principale* peut être considérée comme étant le résultat de la division de 17 par 12. Selon la procédure employée, elle peut donc avoir diverses formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* où les quantièmes de cette expression sont des multiples du *quantième principal*, nous pouvons distinguer les trois décompositions suivantes :

$$Q = \frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12} =$$

$$= 1 + \frac{6+1}{12} = 1 + \frac{6}{12} + \frac{1}{12} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \ ;$$

$$= 1 + \frac{4+3}{12} = 1 + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ ;$$

$$= 1 + \frac{4+2+1}{12} = 1 + \frac{4}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \, .$$

La première, à savoir, 1 1/2 1/12, correspond aux expressions données par l'Auteur. La présence du quantificateur 1/2 invite à commencer par un *dédoublement*. Nous pouvons présenter et commenter la division de 19 par 12 comme suit :

[10] Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, p. 12.

\ 1	12	(initialisation)
\ 1/2	6	(dédoublement)
\ 1/12	1	(inversion de l'initialisation)
Total	19	

Toutefois, le diviseur étant égal au nombre 12 qui est *ternaire*, nous pouvons aussi penser opérer à l'aide des *multiplicateurs ternaires* et procéder alors comme suit :

\ 1	12	(initialisation)
2/3	8	(« table de deux-tiers »)
\ 1/3	4	(dédoublement)
Manque	3	
\ 1/4	3	(inversion de la ligne du multiplicateur 1/3)
Total	19	

Nous avons obtenu la deuxième forme de l'*expression secondaire principale*.

Enfin nous pouvons considérer une procédure plus classique qui conduit à la troisième forme :

\ 1	12	(initialisation)
2/3	8	(« table de deux-tiers »)
\ 1/3	4	(dédoublement)
Manque	3	
\ 1/12	1	(inversion de l'initialisation)
\ 1/6	2	(doublement)
Total	19	

Les trois formes sont donc accessibles. Seule, la première expression donne lieu, pour le premier quantième, au quantième le plus grand :

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}.$$

OBTENTION DU MANQUE

Théoriquement, si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples*, nous avons deux décompositions pour le *manque* :

$$M = 2 - (19 \times \frac{1}{12}) = 2 - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}) = 2 - \frac{19}{12} = \frac{24-19}{12} = \frac{5}{12}$$

$$= \frac{4+1}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \ ;$$

$$= \frac{3+2}{12} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \, .$$

Si nous voulons procéder par soustraction et utiliser le *procédé des auxiliaires numériques*, ceci conduit à choisir le nombre 12 pour *référent commun* et à diviser 5 par 12. Or, de manière assez naturelle, le nombre 12 étant *ternaire*, la division pourrait se présenter comme suit :

	1	12	(initialisation)
	2/3	8	(« table de deux-tiers »)
\	1/3	4	(dédoublement)
\	1/12	1	(inversion de l'initialisation)

Nous obtenons alors :

$$M = \frac{5}{12} = 5:12 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

qui donne lieu à la *décomposition égyptienne simple* suivante en trois quantièmes :

(B19) $$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228} = \frac{1}{12} + \frac{1}{19\times 3} + \frac{1}{19\times 12} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \, .$$

Pour parvenir à ce que nous lisons dans le *Papyrus Rhind*, nous pouvons procéder comme suit :

	1	12	(initialisation)
	2/3	8	(« table de deux-tiers »)
	1/3	4	(dédoublement)
\	1/6	2	(dédoublement)
\	1/4	3	(inversion de la troisième ligne)

Nous pouvons simplement constater que cette manière d'opérer semble peu naturelle.

Si, maintenant, nous voulons utiliser diverses relations, nous pouvons procéder comme suit. Le dernier quantième de l'*expression secondaire principale* est égal à 1/12. Il figure dans plusieurs réductions, en particulier dans l'égalité suivante :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \, .$$

Par suite, on ajoute 1/4 qui est ainsi un élément du *manque partiel*, d'où :

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}) + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{12}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \, .$$

Il manque encore 1/6, d'où le *manque* total 1/4 1/6. Nous pouvons noter que l'examen des diverses *décompositions de deux* nous conduit à remarquer que

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12},$$

égalité que nous pourrions aussi utiliser. Nous lui avons préféré une relation que nous pouvons qualifier de plus « élémentaire » en ce sens qu'elle figure dans le *Rouleau de cuir*.

L'obtention de la première forme du *manque*, à savoir, 1/3 1/12, est tout aussi aisée. Il suffit d'ajouter successivement 1/12 et 1/3 :

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12})+\frac{1}{12}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{12}+\frac{1}{12})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\ ;$$

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})+\frac{1}{3}=1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=1+1=2\,.$$

L'examen des diverses procédures employées pour exprimer le *manque* montre leurs avantages mais aussi leurs inconvénients. L'utilisation de la division peut conduire à mettre en œuvre des techniques peu classiques ou du moins assez élaborées qui relèvent plus de la connaissance des résultats que de la conduite véritable de l'opération. La considération de diverses relations n'est pas tout à fait le fruit du hasard. Ainsi, les scribes veulent une expression qui comporte des quantièmes assez grands et en faible quantité. Ici, la grandeur des quantièmes est prise en compte en prenant comme premier élément du *manque partiel*, 1/4 au lieu de 1/12.

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/19

Le nombre 19 étant premier, il existe une seule décomposition de 2/19 en deux quantièmes distincts :

(A19) $$\frac{2}{19}=\frac{1}{10}+\frac{1}{190}\,.$$

Il existe une seule autre décomposition *égyptienne simple* de 2/19 en trois quantièmes :

(B19) $$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{57}+\frac{1}{228}=\frac{1}{12}+\frac{1}{19\times 3}+\frac{1}{19\times 12}\quad\text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12})+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\,.$$

Il existe une seule décomposition *égyptienne simple* de 2/19 en quatre quantièmes :

(C19) $$\frac{2}{19}=\frac{1}{18}+\frac{1}{38}+\frac{1}{57}+\frac{1}{171}=\frac{1}{18}+\frac{1}{17\times 2}+\frac{1}{17\times 3}+\frac{1}{17\times 9}\,.$$

Son *quantième principal*, 1/18, ainsi que l'expression de son *manque*, 1/2 1/3 1/9, nous poussent à ne pas l'étudier davantage.

La décomposition **(A19)** est *primaire* :

(DP19) $$\frac{2}{19}=\frac{2}{19+1}+\frac{2}{19\times(19+1)}=\frac{2}{20}+\frac{2}{19\times 20}=\frac{1}{10}+\frac{1}{19\times 10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{190}\,.$$

Son *quantième principal* étant égal à 1/10, elle peut être obtenue en commençant la division de 2 par 19 par une « division par dix » :

1   19   (initialisation)

\ 1/10	1 2/3 1/5 1/30	(division par dix)
Manque	1/10	**(2_{91})**
\ 1/190	1/10	(inversion-multiplication)

Le calcul du *manque* est immédiat car nous avons utilisé la *table de dixièmes* qui figure, après, dans le *Papyrus Rhind* et, plus particulièrement retenu le résultat de la division de 9 par 10 : il reste donc 1/10.

Quant aux *doublements éventuels*, en utilisant les expressions **(d_5)** et **(d_{95})**, nous obtenons des décompositions de 4/19 et de 8/19 qui sont respectivement en deux et en en quatre quantièmes :

$$\frac{4}{19} = \frac{2}{19} \otimes 2 = (\frac{1}{10} + \frac{1}{190}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 5} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 95} \otimes 2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{95} \ ;$$

$$\frac{1}{19} \times 8 = (\frac{1}{19} \times 4) \otimes 2 = (\frac{1}{5} + \frac{1}{95}) \otimes 2 = (\frac{1}{5} \otimes 2) + (\frac{1}{95} \otimes 2) = (\frac{1}{3} + \frac{1}{15}) + (\frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}) =$$

$$= \frac{1}{3} + (\frac{1}{15} + \frac{1}{60}) + \frac{1}{380} + \frac{1}{570} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$$

La décomposition *égyptienne simple* de 2/19 en trois quantièmes :

(B_{19}) $\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228} = \frac{1}{12} + \frac{1}{19 \times 3} + \frac{1}{19 \times 12}$ avec $2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$,

a le même quantième principal que celui donné par l'Auteur. Dans la division de 2 par 19 elle revient à écrire différemment le *manque*, 1/3 1/12 au lieu de 1/4 1/6, tout en donnant lieu aux mêmes expressions pour les *doublements éventuels* :

$$\frac{4}{19} = \frac{2}{19} \otimes 2 = (\frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 6} \otimes 2) + (\frac{1}{3 \times 19} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 114} \otimes 2) =$$

$$= \frac{1}{6} + (\frac{1}{38} + \frac{1}{114}) + \frac{1}{114} = \frac{1}{6} + \frac{1}{38} + (\frac{1}{114} + \frac{1}{114}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{38} + \frac{1}{57}.$$

Nous aboutissons à la même expression qu'avec la décomposition **(d_{19})** mais, cette fois, moins rapidement.

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/19 et de 8/19:

	(d_{19})	**(A_{19})**	**(B_{19})**
4/19	3	2	3
8/19	4	4	4

EN GUISE DE CONCLUSION

L'exercice R2/19 nous semble être intéressant à plus d'un titre. Tout d'abord, nous avons vu qu'en d'autres lieux ou à d'autres époques, les savants ont pu considérer d'autres expressions de 2/19 que celle exprimée par l'Auteur. La décomposition en deux quantièmes **(DP_{19})** lui était pourtant accessible tout en donnant lieu à peu de simplifications lors des *doublements éventuels*. Ceci peut battre en brèche certaines considérations liées uniquement au nombre des quantièmes. Autrement dit, les hypothèses trop théoriques doivent être confrontées à la pratique supposée des scribes égyptiens pour mener à bien leurs calculs. Toutefois, nous pouvons remarquer que le rejet d'une décomposition en deux quantièmes est peut-être lié aux critères de *simplicité* que nous avons retenus. Comme pour la plupart des décompositions égyptiennes en deux termes qui n'ont pas été « retenues » par l'Auteur, l'*expression secondaire principale* comporte un ou plusieurs termes qui ne sont pas des multiples du *quantième principal*, autrement dit, selon notre appellation, la décomposition **(DP_{19})** n'est pas *simple*. Avec toutes les précautions d'usage, il nous semble que les expressions données par l'Auteur sont alors les « meilleures » tant du point de vue de leur obtention que de leur application pour des doublements ultérieurs. Nous pouvons penser que la division de 2 par 19 à l'aide de la suite de *multiplicateurs ternaires* 2/3, 1/3, 1/6 et 1/12 jointe à une simplification « classique » permet d'aboutir très facilement aux diverses expressions données par l'Auteur. Ceci peut aussi expliquer l'absence de la décomposition en deux quantièmes. Enfin, nous pouvons constater une opposition implicite dans l'utilisation de tables : « table de deux-tiers » pour les expressions données par l'Auteur et *table de dixièmes* pour la *décomposition primaire* **(DP_{19})**. Une nouvelle fois, la première semble prévaloir. Notons que, dans le *Papyrus byzantin d'Akhmîm*, comme correspondants des *doublements éventuels*, nous trouvons des expressions différentes, respectivement, 1/5 1/95 et 1/3 1/30 1/38 1/57 1/95. La simplicité pour le double et le quadruple s'est transformée en une complexité extrême pour l'octuple.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 12.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. II.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, pp. 446, 450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 85, 87, 91.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, pp. 257, 258.
Bruins, 1981_2, Reducible and Trivial Decompositions Concerning Egyptian Arithmetics, p. 285.
Cantor, 1907, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, p. 59.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 29, 82.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. II, pl. 6.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 52.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 124, 328.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 37, pl. II.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, pp. 135-136.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 58.
Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 295.
Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 205.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 105, 111-112.
Hultsch, 1897, Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung, p. 184.
Hultsch, 1901, Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, p. 183.
Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments : UC 32114B, UC 32118B, UC 32134A+B, UC 32159-UC 32162, *in* Collier, Quirk, 2004, *The UCL Lahun Papyri*, pp. 92-93.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 136, 140, 166.

Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 104.
Neugebauer, 1931, Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter, p. 370.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 40, pl. A.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_9, p. 86.
Ritter, 2000, Egyptian mathematics *in* Selin, 2000, *Mathematics across cultures*, pp. 129-131.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 2-3.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, pp. 331, 333.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363, 368, 377, 381.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Van der Waerden, 1980, The (2: n) Table in the Rhind Papyrus, pp. 266, 270.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, pp. 118-119.
Vogel, 1929, Erweitert die Lederrolle unsere Kenntnis ägyptischer Mathematik ? p. 399.
Wieleitner, 1925_1, Zur ägyptischen Mathematik, p. 130.