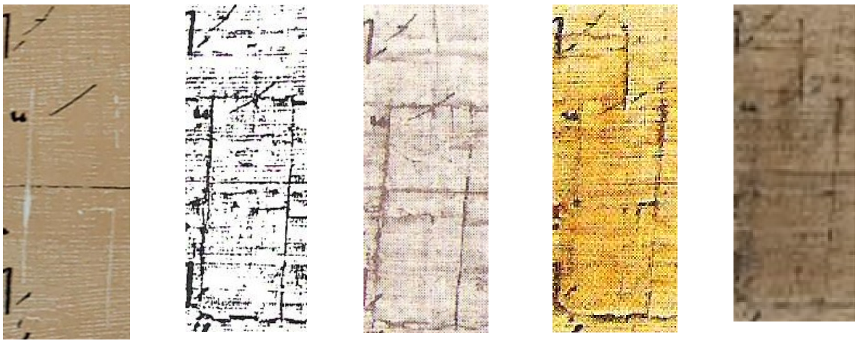
Expressions de 2 à partir de 21

Deux brisures affectent plus ou moins les signes de sommation qu'Âhmès a tracés au début des deuxième et troisième lignes. Pour le premier trait, nous la voyons dans toutes les reproductions photographiques et elle conserve la même disposition. Ce n'est plus le cas pour le second trait qui semble coupé en deux seulement dans les derniers documents publiés par le British Museum.



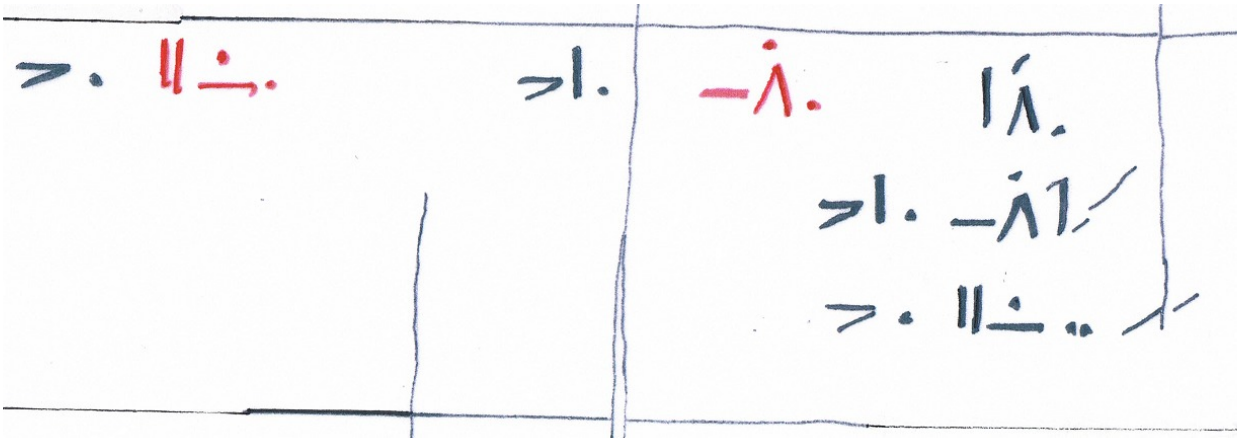
Fac-similé[1] | Chace[2] | Chace[3] | Robins, Shute[4] | Site BM

En fait, le patch qui était faiblement indiqué dans le *Fac-similé* est plus visible dans les reproductions photographiques publiées dans l'ouvrage par l'équipe formée autour de Chace ainsi que dans sa réédition. C'est sans doute, seulement, lors d'une restauration récente qu'il a un peu « glissé » entraînant la « brisure » qui affecte le dernier trait de sommation.

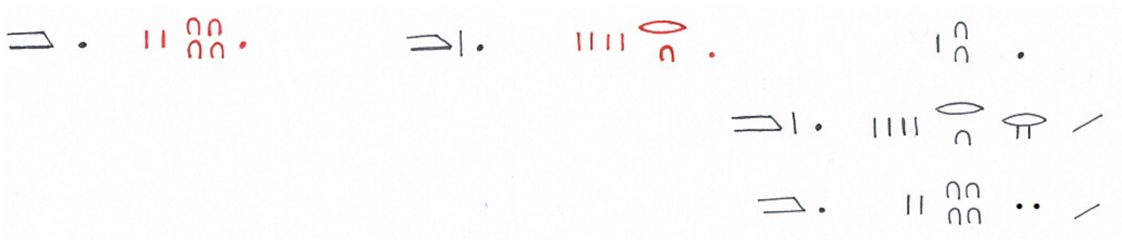
Notons qu'à gauche, en haut et en bas, nous voyons les reprises des traits préparatoires qui encadrent les bandes où Âhmès a écrit les différents exercices.

[1] British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. II.
[2] Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. II.
[3] Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 82.
[4] Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 2.

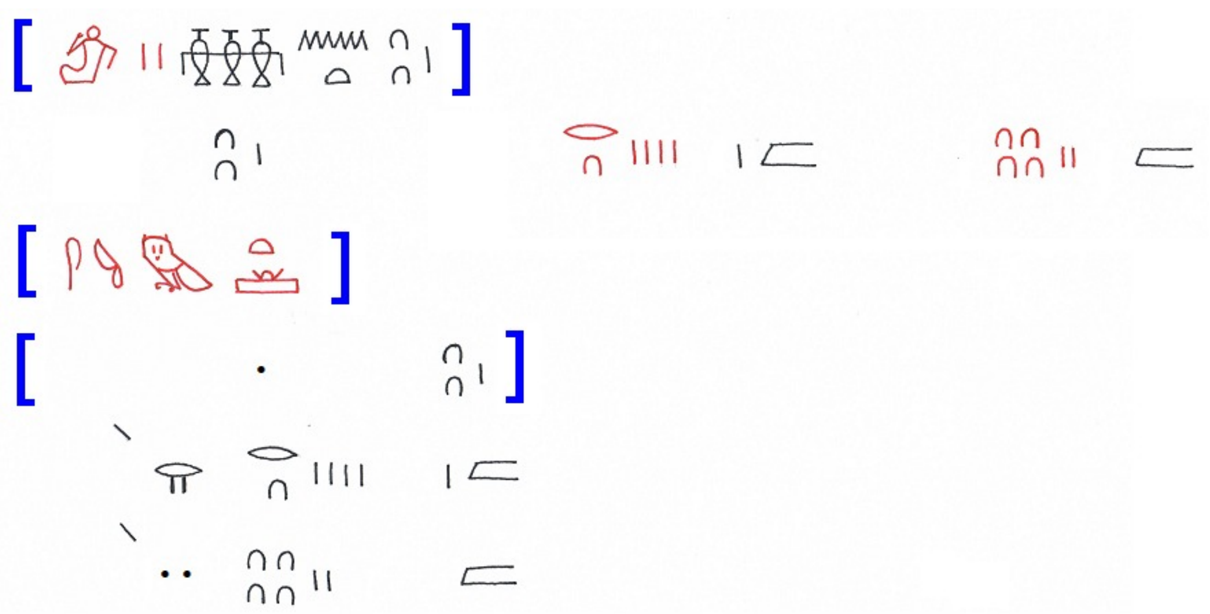
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1 · 21 · **14’** · 1 2’ · **42** · 2’
L_2 \ 3” 14’ · 1 2’
L_3 \ 2 42 · 2’

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1 · *21* · ***14’*** · *1 2’* · ***42**** · *2’*
L_2 *\ 3’’ 14’ · 1 2’*
L_3 *\ 2 42 · 2’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 · 21 · **14’** · 1 2’ · **42***[1] · 2’
L_2 \[2] 3’’ 14’ · 1 2’
L_3 \[3] 2_1 42 · 2’

1 — En hiératique, le chiffre 40 s’écrit , c’est-à-dire qu’il se présente sous la forme d’un trait horizontal surmonté d’un point. Lorsqu’il doit considérer le quantième associé, Âhmès omet souvent d’écrire le deuxième point qui l’indiquerait. Toutefois, en R2/71, lors du *calcul*, il met les deux points alors qu’il s’était contenté d’un seul point dans la première ligne. Il nous est donc difficile de savoir si le scribe écrit le nombre entier ou le quantième. Une fois de plus, le contexte sert d’utile révélateur. Ici, nous pouvons supposer que cette marque est absente dans la première ligne. En revanche, pour la dernière ligne, Âhmès écrivant le multiplicateur indifféremment sous la forme d’un entier ou d’un quantième, nous sommes totalement dans l’incertitude.

2 — Le signe de sommation est brisé. Voir l’introduction à cet exercice.

3 — Sur les dernières publications du British Museum, on voit que ce signe de sommation est brisé. Voir l’introduction à cet exercice.

Traduction

//$_1$	·	21		**14’**	1 2’	**42***	2’
//$_2$	\ 3’’	14’	1 2’				
//$_3$	\ 2	42	2’				

ADAPTATION

[Exprime 2 à partir de 21**]**

21		**1/14**	1 1/2	**1/42**	1/2

[Calcul]

	[1	21**]**
\ 2/3	1/14	1 1/2
\ 2	42	1/2

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 21

Les *expressions fondamentales de deux à partir de 21* sont :

$$\textbf{(d}_{21}\textbf{)}\quad \frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42} \quad \text{et} \quad \textbf{(2}_{21}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}.$$

On trouve les mêmes expressions dans le *Fragment UC 32159-f = K IV. 2 de El-Lahoun*[5] de l'University College de Londres. C'est le dernier exemple pour ce document.

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant **(d_7)** et **(d_{21})**, nous obtenons des décompositions de 4/21 et de 8/21 qui sont ainsi respectivement en deux et quatre quantièmes :

$$\frac{1}{21}\times 4=(\frac{1}{21}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{14}+\frac{1}{42})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 7}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 21}\otimes 2)=\frac{1}{7}+\frac{1}{21}\ ;$$

$$\frac{1}{21}\times 8=(\frac{1}{21}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{7}+\frac{1}{21})\otimes 2=(\frac{1}{7}\otimes 2)+(\frac{1}{21}\otimes 2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 21

Les calculs écrits par Âhmès et la *décomposition de deux* **(2_{21})** montrent que les expressions données par l'Auteur peuvent être rangées dans le cadre général des *décompositions de type « multiple de trois »*. Nous proposons la division commentée suivante :

1	21	(initialisation)
2/3	14	(« table de deux-tiers »)
\ 1/14	1 1/2	(inversion)
Manque	1/2	
\ 1/42	1/2	(inversion-multiplication)

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/21

Le nombre 21 étant le produit des deux nombres premiers 3 et 7, il existe trois autres *décompositions de 2/21 en deux quantièmes* distincts :

$$\textbf{(A}_{21}\textbf{)}\quad \frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{44})+\frac{1}{11},$$

$$\textbf{(B}_{21}\textbf{)}\quad \frac{2}{21}=\frac{1}{12}+\frac{1}{84} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{1}{4},$$

$$\textbf{(C}_{21}\textbf{)}\quad \frac{2}{21}=\frac{1}{15}+\frac{1}{35} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{15})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}).$$

[5] Nous donnons d'abord la nouvelle côte puis l'ancienne. Voir Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments, p. 93 ; http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk/lahun/ucarchivelahun/uc32159-f.jpg.

Il existe seulement deux *décompositions égyptiennes simples* en trois quantièmes :

(D_{21}) $\frac{2}{21}=\frac{1}{12}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}=\frac{1}{12}+\frac{1}{21\times 6}+\frac{1}{21\times 12}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$,

(E_{21}) $\frac{2}{21}=\frac{1}{18}+\frac{1}{42}+\frac{1}{63}=\frac{1}{18}+\frac{1}{21\times 2}+\frac{1}{21\times 3}$ avec $2=(1+\frac{1}{6})+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

La décomposition **(A_{21})** est *primaire*

(DP_{21}) $\frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}=\frac{2}{21+1}+\frac{2}{21\times(21+1)}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{44})+\frac{1}{11}$.

Elle a pour *quantième principal* 1/11 ce qui l'exclut de nos commentaires. La *décomposition de deux* qui peut lui être associée suffit à expliquer ce rejet.

Théoriquement, la décomposition

(B_{21}) $\frac{2}{21}=\frac{1}{12}+\frac{1}{84}$,

se déduit de la décomposition

(d_7) $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$,

qui résulte des expressions données par l'Auteur en R2/7. En effet, nous pouvons écrire :

$$\frac{2}{21}=\frac{2}{3\times 7}=\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}=(\frac{1}{4}+\frac{1}{28})\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4\times 3}+\frac{1}{28\times 3}=\frac{1}{12}+\frac{1}{84}.$$

Elle est donc de *type « multiple de sept »* ce qui nous amène à proposer la procédure suivante pour diviser 2 par 21 :

	1	21	(initialisation)
	1/7	3	(division par sept)
	1/3	7	(inversion)
	1/6	3 1/2	(dédoublement)
\	1/12	1 1/2 1/4	(dédoublement)
	Manque	1/4	
\	1/84	1/4	(inversion-multiplication)

Bien sûr, nous pourrions opérer comme suit :

1	21	(initialisation)
2/3	14	(« table de deux-tiers »)
1/3	7	(dédoublement)

1/6	3 1/2	(dédoublement)
\ 1/12	1 1/2 1/4	(dédoublement)
Manque	1/4	
\ 1/84	1/4	(inversion-multiplication)

Quoiqu'il en soit, les quantièmes de **(B_{21})** sont des inverses de multiples de quatre donc très utiles pour les *doublements éventuels* :

$$\frac{1}{21}\times 4=(\frac{1}{21}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{12}+\frac{1}{84})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 6}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 42}\otimes 2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{42},$$

$$\frac{1}{21}\times 8=(\frac{1}{21}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{6}+\frac{1}{42})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 3}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 21}\otimes 2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{21}.$$

Théoriquement, la décomposition

$$\textbf{(C}_{21}\textbf{)}\quad \frac{2}{21}=\frac{1}{15}+\frac{1}{35},$$

est *composée*. Elle utilise le fait que le nombre 21 est le produit des nombres premiers 3 et 7 :

$$\textbf{(DC}_{21}\textbf{)}\quad \frac{2}{21}=\frac{2}{3\times 7}=\frac{2}{3\times(3+7)}+\frac{2}{7\times(3+7)}=\frac{1}{15}+\frac{1}{35}.$$

La *décomposition de deux* que nous pouvons lui associer est complexe :

$$2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{15})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}).$$

Il en est de même pour les *doublements éventuels*. En utilisant **(d_{15})**, **(d_{35})** et **(d_{21})** nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{21}\times 4=(\frac{1}{21}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{15}+\frac{1}{35})\otimes 2=(\frac{1}{15}\otimes 2)+(\frac{1}{35}\otimes 2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}=$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21},$$

$$\frac{1}{21}\times 8=(\frac{1}{21}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21})\otimes 2=(\frac{1}{10}\otimes 2)+(\frac{1}{15}\otimes 2)+(\frac{1}{21}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}.$$

Enfin, les décompositions *égyptiennes simples* en trois quantièmes semblent être de peu d'intérêt. En effet, la décomposition **(D_{21})** revient à moins bien écrire le manque et la décomposition **(E_{21})** a 1/18 comme *quantième principal* ce qui donne lieu à une longue suite de *multiplicateurs ternaires*.

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/21 et de 8/21 :

	(d_{21})	**(B_{21})**	**(C_{21})**
4/21	2	2	2

8/21	4	2	5

EN GUISE DE CONCLUSION

Curieusement, le cas où *n* est égal à 21 est le dernier du *Fragment UC 32159-f = K IV. 2 de El-Lahoun* de l'University College de Londres et c'est le moment choisi par Âhmès ou ses prédécesseurs pour dévoiler, uniquement sous forme numérique, une technique qui s'avère être de portée générale pour tous les « inverses de multiples de trois ». Contrairement aux calculs écrits par Âhmès lors des exercices relatifs aux nombres qui ne sont pas des multiples de trois, la présentation s'effectue en deux lignes comportant, toutes les deux, trois données numériques :

\	2/3	1/14	1 1/2
\	2	42	1/2

En fait, toujours soucieux de compresser la présentation de la division, l'Auteur nous laisse le soin d'en percer le secret. Mais, en un certain sens, dans les exercices précédents, il nous a préparé le travail. En effet, nous comprenons ce que signifie la deuxième ligne. Il s'agit de l'opération que nous appelons « inversion-multiplication ». En effet, implicitement, le *manque* est égal à 1/2 et nous devons commencer par inverser ce quantième, d'où le nombre 2 qui figure en premier. Ensuite nous devons multiplier le nombre initial par le nombre entier que nous venons de trouver. On obtient 42 qui est le deuxième nombre. Enfin, son inverse est pris comme multiplicateur afin d'aboutir au résultat cherché, à savoir, 1/2 qui est le dernier nombre de la deuxième ligne. Considérant alors la première ligne, nous devons lui associer une lecture tout à fait semblable sachant, cette fois, que son premier nombre, à savoir, 2/3, est le premier multiplicateur de la division de 2 par 21. Nous devons alors multiplier le nombre considéré, à savoir, 21, par 2/3. Il en résulte 14. Son inverse, à savoir, 1/14, est le premier multiplicateur qui doit être retenu : c'est le deuxième nombre de la première ligne. Enfin, le résultat correspondant est l'inverse du premier nombre de cette ligne, à savoir, 2/3 : on obtient donc 1 1/2 qui est le dernier élément de la première ligne. Autrement dit, de manière plus complète, nous devrions avoir

\	2/3	14	1/14	1 1/2
\	2	42	1/42	1/2

Selon que l'Auteur désire insister sur la première opération, à savoir, la multiplication de l'entier considéré, ou sur la division, il considère, pour les nombres médians, soit le nombre entier, résultat de la multiplication, soit sur les multiplicateurs que l'on doit retenir pour l'établissement du résultat de la division.

De la brève étude que nous avons menée, il ressort que les deux décompositions qui présentent un intérêt certain utilisent toutes les deux des *multiplicateurs ternaires* pour mener à bien la division de 2 par 21. Dès lors, nous pouvons penser que la considération générale du seul deux-tiers prévaut ici sur la suite des multiplicateurs ternaires 2/3, 1/3, 1/6 et 1/12 qui conduirait pourtant à une décomposition plus utile pour les *doublements éventuels*. Autrement dit, l'obtention de la décomposition a sans doute prévalu sur son utilisation pour des *doublements éventuels*.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, p. 3.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. II.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 29, 82.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. II, pl. 7.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 52.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 124, 329.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 38, pl. II.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 136.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 58.
Griffith, 1899, Revue de « *Facsimile of the Mathematical Papyrus Rhind in the British Museum*», col. 116.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 100, 130.
Gunn, 1926_1, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 128.
Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments : UC 32114B, UC 32118B, UC 32134A+B, UC 32159-UC 32162, *in* Collier, Quirk, 2004, *The UCL Lahun Papyri*, pp. 92-93.
Hultsch, 1895, Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung, p. 38.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 138, 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 102.
Neugebauer, 1926_1, *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung*, p. 39.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 40, pl. A.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{10}, p. 86.
Ritter, 2000, Egyptian mathematics *in* Selin, 2000, *Mathematics across cultures*, pp. 129-131.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 2-3.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 335.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 24.
Vogel, 1929_1, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 119.