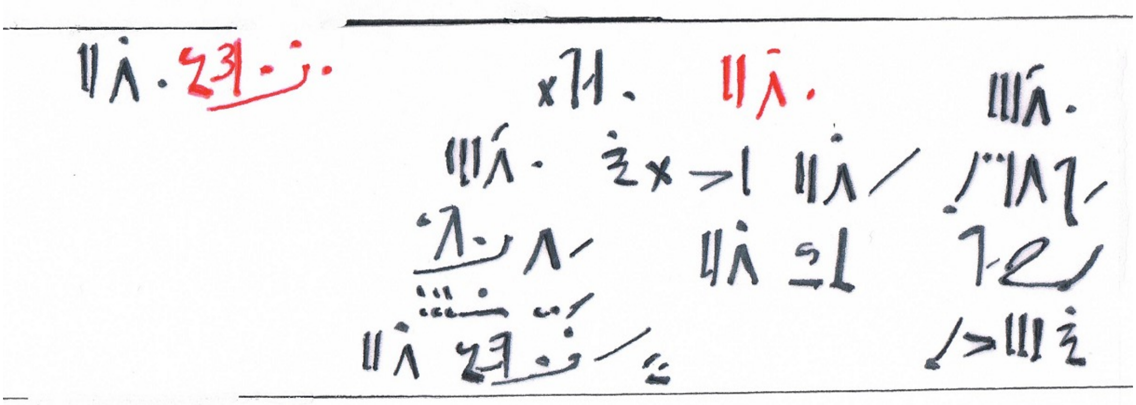
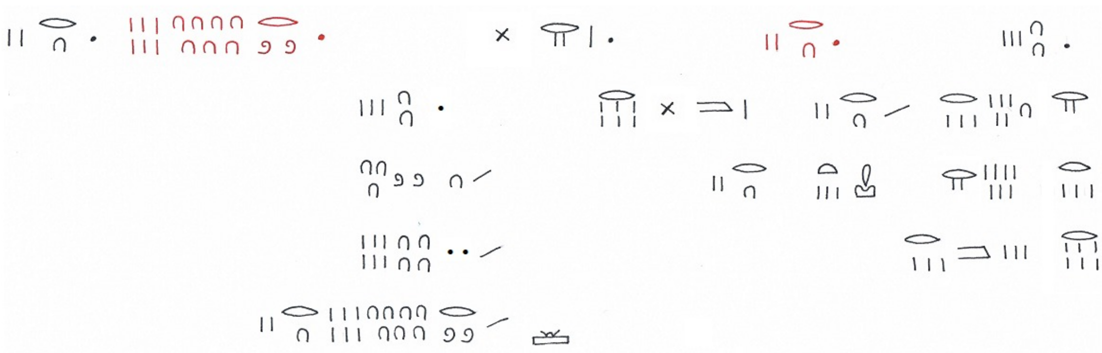
Expressions de 2 à partir de 23

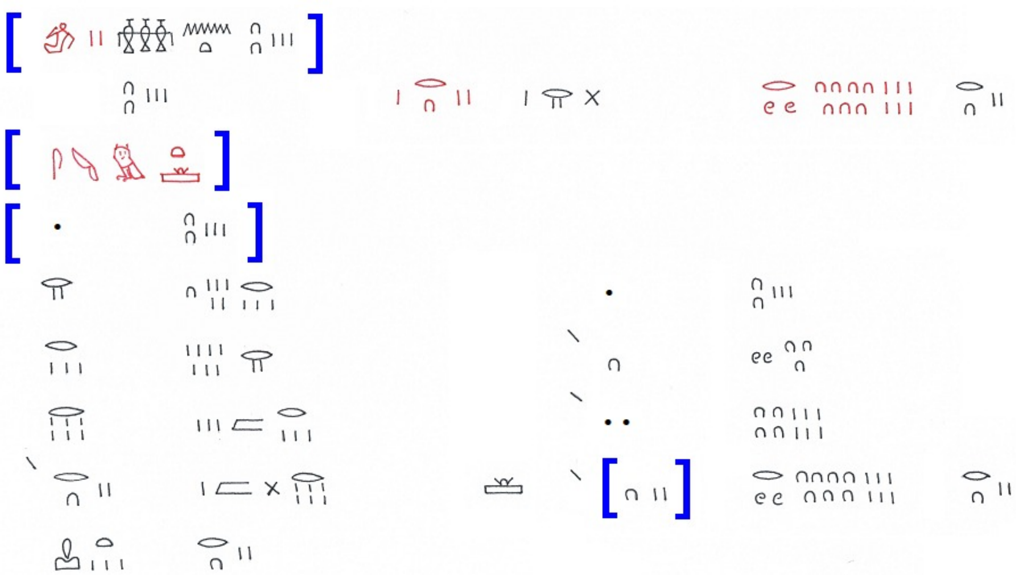
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1 · 23 **· 12’** · 1 3’’ 4’ **· 276’** · 12’

L_2 *3’’ 15 3’ \ 12’ 1 2’ 4’ 6’ 1 23*

L_3 *3’ 7 3’’ DA.t 12’ \ 10 230*

L_4 *6’ 3 2’ 3’ \ 2 46*

L_5 *dmd \ 276’ 12’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1 · 23 **· 12’** · 1 3’’ 4’ **· 276’** · 12’

L_2 *3’’ 15 3’ \ 12’ 1 2’ 4’ 6’ 1 23*

L_3 *3’ 7 3’’ djat 12’ \ 10 230*

L_4 *6’ 3 2’ 3’ \ 2 46*

L_5 *démèd \ 276’ 12’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 · 23 **· 12’** · 1 3’’ 4’ **· 276_2’** · 12’

L_2 3’’ 15 3’ \ 12’ 1 2’ 4’ 6_3’ 1_1 23

L_3 3’ 7 3’’ $djat_1$ 12’ \ 10 230

L_4 6_3’ 3 2’ 3’ \ 2_1 46

L_5 $démèd_1$ \ 276_2’ 12’

Traduction

$//_{1}$	·	23	**12’**	1 3’’ 4’			**276’**	12’
$//_{2a}$	3’’	15 3’	$//_{2c}$	1	23			
$//_{3a}$	3’	7 3’’	$//_{3c}$ \	10	230			
$//_{4a}$	6’	3 2’ 3’	$//_{4b}$ \	2	46			
$//_{2b}$	\ 12’	1 2’ 4’ 6’	$//_{5}$ Total \		276’	12’		
$//_{3b}$	Manque	12’						

ADAPTATION

[Exprime 2 à partir de 23**]**

23	**1/12**	1 2/3 1/4	**1/276**	1/12

[Calcul]

[1	23]				
2/3	15 1/3		1	23	
1/3	7 2/3		\ 10	230	
1/6	3 1/2 1/3		\ 2	46	
\ 1/12	1 1/2 1/4 1/6	Total	\[12]	1/276	1/12
Manque	1/12				

EXPRESSION DE 2 À PARTIR DE 23

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 23* sont :

$$\textbf{(d}_{\textbf{23}}\textbf{)} \quad \frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276} \quad \text{et} \quad \textbf{(2}_{\textbf{23}}\textbf{)} \quad 2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{4})+\frac{1}{12}.$$

On « retrouve » la même décomposition de 2/23 dans le *Papyrus grec Michigan 4966*[1].

Comme dans R2/17, l'*expression secondaire principale*, à savoir, 1 2/3 1/4, diffère du résultat donné dans la partie calcul, à savoir, 1 1/2 1/4 1/6. Ceci revient à utiliser l'égalité qui semble être bien connue des scribes (elle est implicitement considérée dans la division de 2 par 23) :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

Ceci montre le soin apporté à l'écriture des *expressions secondaires* et justifie en quelque sorte notre dénomination particulière : nous aurons l'occasion de mettre l'accent sur des cas semblables de « réduction ». Notons que cette simplification conduit à « choisir » une première fraction plus grande, ici :

$$\frac{2}{3}>\frac{1}{2}.$$

Selon l'endroit où l'on se situe dans l'écrit d'Âhmès, on peut donc considérer deux *décompositions de deux* :

$$\textbf{(2}_{\textbf{23}}\textbf{)} \quad 2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{4})+\frac{1}{12} \quad \text{ou} \quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6})+\frac{1}{12}.$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, nous obtenons immédiatement des décompositions de 4/23 et de 8/23 qui sont en deux quantièmes :

$$\frac{4}{23}=\frac{2}{23}\otimes 2=(\frac{1}{12}+\frac{1}{276})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 6}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 138}\otimes 2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{138};$$

$$\frac{1}{23}\times 8=(\frac{1}{23}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{6}+\frac{1}{138})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 3}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 69}\otimes 2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{69}.$$

On « retrouve » la même décomposition pour le 1/23 de 4 dans le *Papyrus grec Michigan 4966* précité.

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 23

Le *quantième principal* est égal à 1/12. Il est *ternaire*. Par suite, théoriquement et pratiquement, comme l'Auteur nous y invite, nous sommes conduits à effectuer la division de 2 par 23 en utilisant les *multiplicateurs ternaires*. Nous pouvons commenter la division écrite par Âhmès comme suit :

[1] Voir site internet : http://www.lib.umich.edu/pap.

1	23	(initialisation)
2/3	15 1/3	(« table de deux-tiers »)
1/3	7 1/2 1/6	(dédoublement)
1/3	7 2/3	(réduction : 1/2 1/6 en 2/3)
1/6	3 1/2 1/3	(dédoublement)
\ 1/12	1 1/2 1/4 1/6	(dédoublement)
Manque	1/12	**(2_{23})**
\ 1/276	1/12	(inversion-multiplication)

Toujours soucieux d'innovation, l'Auteur nous présente la multiplication auxiliaire de 23 par 12 à l'aide du *multiplicateur* 10 ; dans l'exemple R32, au contraire, il utilisera le procédé des *doublements successifs*. Naviguant entre les entiers et leurs quantièmes associés, l'Auteur aurait dû donner comme total le nombre 276 correspondant au résultat de la multiplication de 23 par 12 : il préfère le quantième 1/276 qui, avec 1/12, « appartiennent » à la division de 2 par 23. Pour la multiplication prise isolément, nous pouvons proposer :

1	23	(initialisation)
\ 10	230	(multiplication par dix)
\ 2	46	(doublement de l'initialisation)
Total	276	

VÉRIFICATION

Théoriquement, l'*expression secondaire principale* peut être considérée comme étant le résultat de la division de 23 par 12. Selon la procédure employée, elle peut donc avoir diverses formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* où les quantièmes de cette expression sont des multiples du *quantième principal*, nous pouvons distinguer les deux décompositions suivantes :

$$Q = \frac{23}{12} = 1 + \frac{11}{12} =$$

$$= 1 + \frac{6+4+1}{12} = 1 + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\ ;$$

$$= 1 + \frac{6+3+2}{12} = 1 + \frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\,.$$

La dernière correspond aux expressions données par l'Auteur dans la partie « calcul » tandis que la première doit subir quelques réductions pour obtenir l'autre décomposition déduite de la première ligne du texte écrit par Âhmès :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+\frac{1}{12}=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1+\frac{2}{3}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{12})=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}.$$

La présence du multiplicateur 1/2 invite à commencer par un *dédoublement*. Nous pouvons présenter et commenter la division de 23 par 12 comme suit :

\ 1	12	(initialisation)
\ 1/2	6	(dédoublement)
\ 1/4	3	(dédoublement)
Manque	2	
1/12	1	(inversion de l'initialisation)
\ 1/6	2	(doublement)
Total	23	

Il suffit de remplacer 1/2 1/6 par 2/3 pour aboutir.

Toutefois, le diviseur étant égal au nombre 12 qui est *ternaire*, nous pouvons penser opérer à l'aide des *multiplicateurs ternaires* et procéder alors comme suit :

\ 1	12	(initialisation)
\ 2/3	8	(« table de deux-tiers »)
1/3	4	(dédoublement)
\ 1/6	2	(dédoublement)
\ 1/12	1	(dédoublement)
Total	23	

Il suffit alors de remplacer 1/6 1/12 par 1/4 pour obtenir l'*expression secondaire principale* que nous lisons à la première ligne.

Les diverses formes sont donc accessibles. Seule, pour la première, la présence du deux-tiers met l'accent sur la « fraction » la plus grande,

OBTENTION DU MANQUE

D'un point de vue théorique, nous avons :

$$M=2-23\times\frac{1}{12}=2-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6})=2-\frac{23}{12}=\frac{24-23}{12}=\frac{1}{12}.$$

Autrement dit l'obtention théorique du *manque* est aisée. Nous savons que ceci est toujours le cas pour toute *décomposition primaire* : le *manque* est égal au *quantième principal*.

Si nous voulons procéder par soustraction et utiliser le *procédé des auxiliaires numériques*, alors nous devons choisir le nombre 12 pour *référent commun* : nous obtenons immédiatement

1/12 comme *manque*. Si, par ailleurs, nous voulons utiliser certaines relations, il nous suffit de considérer celle qui correspond à l'égalité suivante,

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12},$$

relation qui peut être obtenue par dédoublement de l'égalité fondamentale

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/23

Le nombre 23 étant premier, il existe une seule *décomposition de 2/23 en deux quantièmes distincts*[2], la décomposition *primaire*[3] :

$$\textbf{(DP}_{\textbf{23}}\textbf{)}\quad \frac{2}{23}=\frac{2}{23+1}+\frac{2}{23\times(23+1)}=\frac{2}{24}+\frac{2}{23\times 24}=\frac{1}{12}+\frac{1}{23\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}.$$

C'est celle que nous déduisons des expressions données par l'Auteur :

$$\textbf{(d}_{\textbf{23}}\textbf{)}\quad \frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}\qquad \text{avec}\qquad \textbf{(2}_{\textbf{23}}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{4})+\frac{1}{12}.$$

Il existe une seule *décomposition égyptienne simple* en trois quantièmes :

$$\textbf{(A}_{\textbf{23}}\textbf{)}\quad \frac{2}{23}=\frac{1}{16}+\frac{1}{46}+\frac{1}{368}=\frac{1}{16}+\frac{1}{23\times 2}+\frac{1}{23\times 16}\quad \text{et}\quad 2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16})+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}.$$

Son *quantième principal* étant égal à 1/16, nous obtenons immédiatement les expressions correspondantes en divisant 2 par 23 par *dédoublements successifs* :

	1	23	(initialisation)
	1/2	11 1/2	(dédoublement)
	1/4	5 1/2 1/4	(dédoublement)
	1/8	2 1/2 1/4 1/8	(dédoublement)
\	1/16	1 1/4 1/8 1/16	(dédoublement)
Manque		1/2 1/16	
\	1/46	1/2	(inversion-multiplication)
\	1/368	1/16	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, nous pouvons écrire :

$$\frac{4}{23}=\frac{2}{23}\otimes 2=(\frac{1}{16}+\frac{1}{46}+\frac{1}{368})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 8}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 23}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 184}\otimes 2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{23}+\frac{1}{184}\ ;$$

[2] Voir l'annexe E 6 : décompositions théoriques en deux quantièmes distincts.
[3] Voir aussi l'annexe E 7 : décompositions primaires.

$$\frac{1}{23}\times 8=(\frac{1}{23}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{8}+\frac{1}{23}+\frac{1}{184})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 4}\otimes 2)+(\frac{1}{23}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 92}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{46}+\frac{1}{368}+\frac{1}{92}.$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/23 et de 8/23

	(d_{23})	**(A_{23})**
4/23	2	3
8/23	2	5

EN GUISE DE CONCLUSION

Des études que nous avons menées, il résulte que la division de 2 par 23 s'effectue presque aussi facilement par *dédoublements successifs* qu'à l'aide des *multiplicateurs ternaires*. Chacune conduit à des quantièmes principaux qui peuvent s'avérer être très utiles : respectivement, 1/16 et 1/12. Toutefois le second l'emporte lorsque l'on considère les *doublements éventuels*. Il semble que la *décomposition en deux quantièmes* **(d_{23})** soit la « meilleure » possible : nombre minimal de quantièmes, quantièmes inverses de nombres multiples de douze donc multiples de trois et de quatre, obtention aisée à l'aide du multiplicateur deux-tiers suivi de *dédoublements successifs*, *manque* assez immédiat et enfin quantièmes assez grands sans oublier les expressions des *doublements éventuels*. Avec **(d_{23})** nous avons la dernière *décomposition en deux quantièmes* pour l'« *inverse d'un nombre premier* ».

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 14, 17.

British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. II.

Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.

Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 85, 88, 91.

Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, p. 258.

Cantor, 1907, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, p. 66.

Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 29, 82.

Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. II, pl. 7.

Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 52.

Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 124, 329.

Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 38, pl. II.

Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 137.

Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 58.

Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 294.

Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 105, 110-113.

Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 140, 166.

Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 101.

Neugebauer, 1931, Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter, pp. 369-370.

Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 40, 136 ; pl. A.

Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{11}, p. 86.

Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 2-3.

Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 331.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363, 368, 381.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Van der Waerden, 1980, The (2: n) Table in the Rhind Papyrus, pp. 266, 270.
Vogel, 1929_1, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 119.
Vogel, 1929_2, Erweitert die Lederrolle unsere Kenntnis ägyptischer Mathematik ? pp. 399, 404.