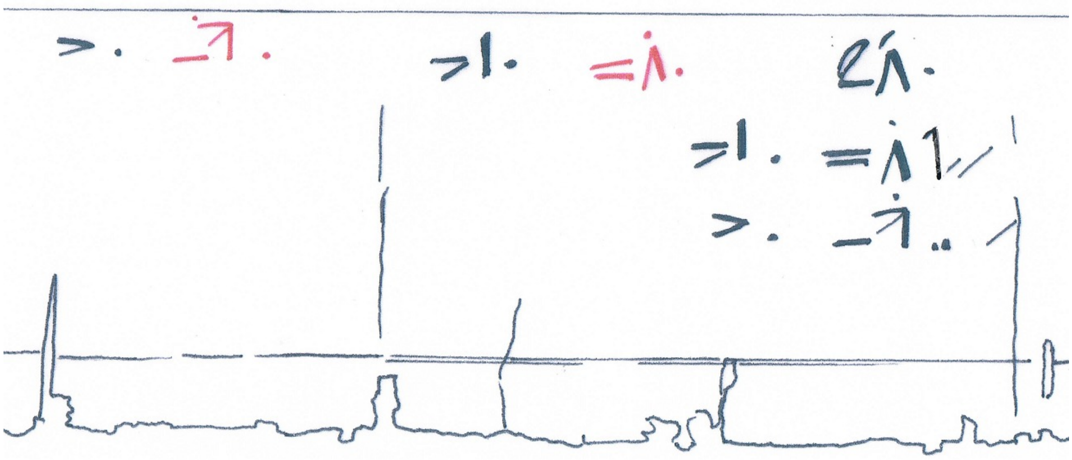
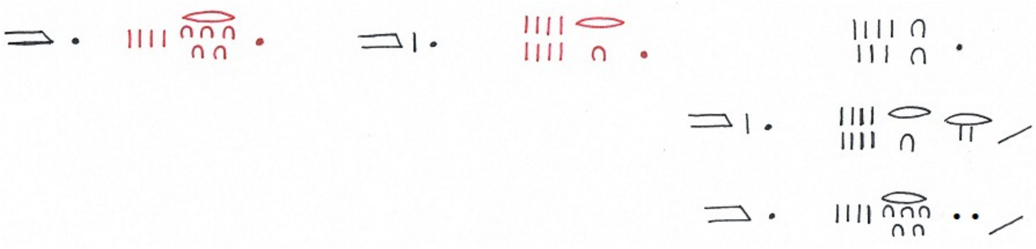
Expressions de 2 à partir de 27

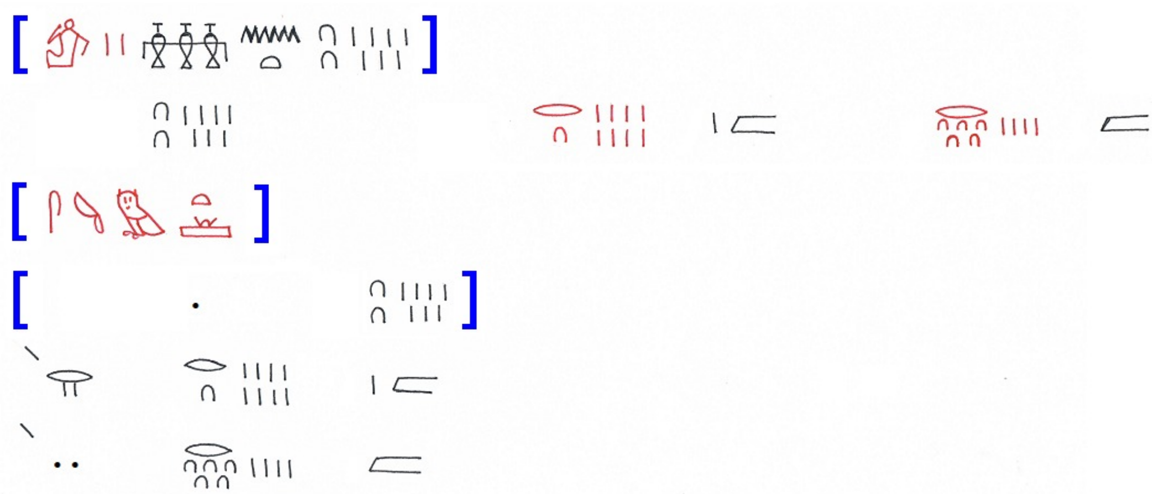
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L1	*· 27 **· 18’** · 1 2’ **· 54’** · 2’*
L2	*\ 3’’ 18’ · 1 2’*
L3	*\ 2 54’ · 2’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L1	*· 27 **· 18’** · 1 2’ **· 54’** · 2’*
L2	*\ 3’’ 18’ · 1 2’*
L3	*\ 2 54’ · 2’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L1	· 27 **· 18’** · 1 2’ **· 54’** · 2’
L2	\ 3’’ 18’ · 1 2’
L3	\ 2_1 54’ · 2’

TRADUCTION [1]

//$_1$	·	27			**18’**	1 2’	**54’**	2’
//$_2$	\ 3’’	18’	1 2’					
//$_3$	\ 2	54’	2’					

1 — Nous sommes dans le cadre des *multiples de trois* où, à partir de R2/21, si nous faisons abstraction de la présence ou de l’absence, soit de points marquant la séparation ou les quantièmes, soit encore des traits de « sommation », l’Auteur adopte une présentation semblable. Nous réduisons en conséquence nos commentaires. Ici, nous pouvons noter que, dans la présentation de la division, l’Auteur considère les quantièmes 1/18 et 1/54 c’est-à-dire qu’il considère ces nombres comme des multiplicateurs, autrement qu’il se place véritablement dans le cadre de la division de 2 par 27.

ADAPTATION

[Exprime 2 à partir de 27**]**

	27	**1/18**	1 1/2	**1/54**	1/2

[Calcul]

	[1	27]
\ 2/3	1/18	1 1/2
\ 2	1/54	1/2

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 27

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 27* sont :

$$\textbf{(d}_{27}\textbf{)} \quad \frac{2}{27} = \frac{1}{18} + \frac{1}{54} \quad \text{et} \quad \textbf{(2}_{27}\textbf{)} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}.$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant **(d$_9$)** et **(d$_{27}$)**, nous obtenons des décompositions de 4/27 et de 8/27 qui sont ainsi respectivement en deux et trois quantièmes :

$$\frac{1}{27} \times 4 = (\frac{1}{27} \otimes 2) \otimes 2 = (\frac{1}{18} + \frac{1}{54}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 9} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 27} \otimes 2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{27},$$

$$\frac{1}{27} \times 8 = (\frac{1}{27} \times 4) \otimes 2 = (\frac{1}{9} + \frac{1}{27}) \otimes 2 = (\frac{1}{9} \otimes 2) + (\frac{1}{27} \otimes 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{54}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 27

Les calculs écrits par Âhmès et la *décomposition de deux* **(2$_{27}$)** montrent que les expressions données par l'Auteur peuvent être rangées dans le cadre général des *décompositions de type « multiple de trois »*. Nous proposons la division suivante :

1	27	(initialisation)
2/3	18	(« table de deux-tiers »)
\ 1/18	1 1/2	(inversion)
Manque	1/2	**(2$_{27}$)**
\ 1/54	1/2	(inversion-multiplication)

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/27

Le nombre 27 étant le cube d'un nombre premier impair il existe deux autres *décompositions de 2/27 en deux quantièmes distincts* :

$$\textbf{(A}_{27}\textbf{)} \quad \frac{2}{27} = \frac{1}{14} + \frac{1}{378} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}) + \frac{1}{14}$$

$$\textbf{(B}_{27}\textbf{)} \quad \frac{2}{27} = \frac{1}{15} + \frac{1}{135} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}) + \frac{1}{5}.$$

Il existe deux autres *décompositions égyptiennes simples* en trois quantièmes :

$$\textbf{(C}_{27}\textbf{)} \quad \frac{2}{27} = \frac{1}{16} + \frac{1}{108} + \frac{1}{432} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}) + \frac{1}{4} + \frac{1}{16};$$

$$\textbf{(D}_{27}\textbf{)} \quad \frac{2}{27} = \frac{1}{18} + \frac{1}{81} + \frac{1}{162} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

La décomposition **(A$_{27}$)** est *primaire* :

(DP$_{27}$) $\frac{2}{27} = \frac{2}{27+1} + \frac{2}{27\times(27+1)} = \frac{1}{14} + \frac{1}{378}$ avec $2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}) + \frac{1}{14}$.

Elle peut être vérifiée assez facilement mais son obtention à partir de la division de 2 par 27 peut sembler être peu naturelle. En effet, l'inverse du *quantième principal*, à savoir, le nombre 14, étant le produit des nombres premiers 2 et 7, nous devons effectuer un *dédoublement* et une division par 7. En considérant ces opérations secondaires dans cet ordre nous pouvons avoir

1	27	(initialisation)
1/2	13 1/2	(dédoublement)
\ 1/14	1 1/2 1/4 1/7 1/28	(division par sept)
Manque	1/14	
\ 1/378	1/14	(inversion-multiplication)

Si nous adoptons l'ordre inverse, nous pouvons alors procéder comme suit :

1	27	(initialisation)
1/7	3 1/2 1/4 1/14 1/28	(division par sept)
\ 1/14	1 1/2 1/4 1/7 1/28	(dédoublement et simplification)
Manque	1/14	
\ 1/378	1/14	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels* nous avons :

$$\frac{1}{27}\times 4 = (\frac{1}{27}\otimes 2)\otimes 2 = (\frac{1}{14} + \frac{1}{378})\otimes 2 = (\frac{1}{2\times 7}\otimes 2) + (\frac{1}{2\times 189}\otimes 2) = \frac{1}{7} + \frac{1}{189},$$

$$\frac{1}{27}\times 8 = (\frac{1}{27}\times 4)\otimes 2 = (\frac{1}{7} + \frac{1}{189})\otimes 2 = (\frac{1}{7}\otimes 2) + (\frac{1}{3\times 61}\otimes 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{126} + \frac{1}{378}.$$

Nous pouvons noter que la décomposition **(A$_{27}$)** n'est pas *simple*.

Le *quantième principal* de la *décomposition composée particulière*

(B$_{27}$) $\frac{2}{27} = \frac{2}{3\times(1+9)} + \frac{2}{27\times(1+9)} = \frac{1}{15} + \frac{1}{135}$ avec $2 = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}) + \frac{1}{5}$.

étant égal à 1/15, pour parvenir aux expressions données par l'Auteur, nous sommes conduits à effectuer la division de 2 par 27 en utilisant les *multiplicateurs ternaires* et la « division par dix » :

1	27	(initialisation)
2/3	18	(« table de deux-tiers »)
1/3	9	(inversion)
1/10 de1/3	2/3 1/5 1/30	(division par dix)
1/30	2/3 1/5 1/30	(multiplication-simplification)
\ 1/15	1 2/3 1/10 1/30	(doublement et simplification)
Manque	1/5	
\ 1/135	1/5	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, en utilisant les « multiples de trois » et certaines simplifications, nous obtenons des expressions qui sont les mêmes que celles que nous avons données à partir de **(d27)** :

$$\frac{1}{27}\times 4=(\frac{1}{27}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{15}+\frac{1}{135})\otimes 2=(\frac{1}{3\times 5}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 45}\otimes 2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{90}+\frac{1}{270}=$$
$$=(\frac{1}{10}+\frac{1}{90})+(\frac{1}{30}+\frac{1}{270})=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}.$$

Quant à la *décomposition égyptienne simple* en trois quantièmes

(C27) $\frac{2}{27}=\frac{1}{16}+\frac{1}{108}+\frac{1}{432}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16})+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$,

son *quantième principal* étant égal à 1/16, son obtention est aisée

1	27	(initialisation)
1/2	13 1/2	(dédoublement)
1/4	6 1/2 1/4	(dédoublement)
1/8	3 1/4 1/8	(dédoublement)
\ 1/16	1 1/2 1/8 1/16	(dédoublement)
Manque	1/4 1/16	
\ 1/108	1/4	(inversion-multiplication)
\ 1/432	1/16	(inversion-multiplication)

ainsi que les *doublements éventuels* :

$$\frac{1}{27}\times 4=(\frac{1}{27}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{16}+\frac{1}{108}+\frac{1}{432})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 8}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 54}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 216})=$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{54}+\frac{1}{216};$$

$$\frac{1}{27}\times 8=(\frac{1}{27}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{8}+\frac{1}{54}+\frac{1}{216})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 4}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 27}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 108}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{27}+\frac{1}{108}.$$

Mais nous savons que l'Auteur ne considère pas ce *quantième principal*. Une fois de plus le caractère « *multiple de trois* » semble être prépondérant.

Le *quantième principal* de la *décomposition égyptienne simple* en trois termes

(D27) $\frac{2}{27}=\frac{1}{18}+\frac{1}{81}+\frac{1}{162}$ avec $2=(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$,

étant le même que celui de la décomposition **(d27)**, nous pouvons considérer qu'elle revient, théoriquement, à moins bien écrire le *manque*. Notons que cette remarque est valable pour tous les « multiples de neuf ». De l'expression en deux quantièmes

$$\frac{2}{9k} = \frac{1}{6k} + \frac{1}{18k} \qquad \text{avec} \qquad 2 = (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2},$$

on déduit la décomposition en trois quantièmes

$$\frac{2}{9k} = \frac{1}{6k} + \frac{1}{27k} + \frac{1}{54k} \qquad \text{avec} \qquad 2 = (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6},$$

en remplaçant le *manque* égal à 1/2 par 1/3 1/6. Ceci se confirme aussi lorsque l'on cherche à exprimer les *doublements éventuels*. En effet, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{27} \times 4 = (\frac{1}{27} \otimes 2) \otimes 2 = (\frac{1}{18} + \frac{1}{81} + \frac{1}{162}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 92} \otimes 2) + (\frac{1}{3 \times 27} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 81} \otimes 2) =$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{54} + \frac{1}{162} + \frac{1}{81} = \frac{1}{9} + (\frac{1}{27 \times 2} + \frac{1}{27 \times 3} + \frac{1}{27 \times 6}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{27}.$$

Nous avons effectué une simplification pour retrouver l'expression obtenue à partir de **(d_{27})**.

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/27 et de 8/27 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications peu classiques) :

	(d_{27})	**(A_{27})**	**(B_{27})**	**(C_{27})**	**(D_{27})**
4/27	2	2	2	3	2
8/27	3	4	**3**	3	**3**

EN GUISE DE CONCLUSION

L'Auteur a donné des *expressions de type « multiple de trois »*. Les autres décompositions que nous pouvons considérer n'apportent pas des simplifications notables.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, p. 3.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. II.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 29, 82.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. II, pl. 8.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 52.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 125, 329.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 38, pl. II.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 138.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 59.
Hultsch, 1895, Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung, pp. 38,70, 123-4.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 102.
Neugebauer, 1926_1, *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung*, p. 39.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 41, pl. B.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{13}, p. 86.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 2-3.

Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 335.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 120.