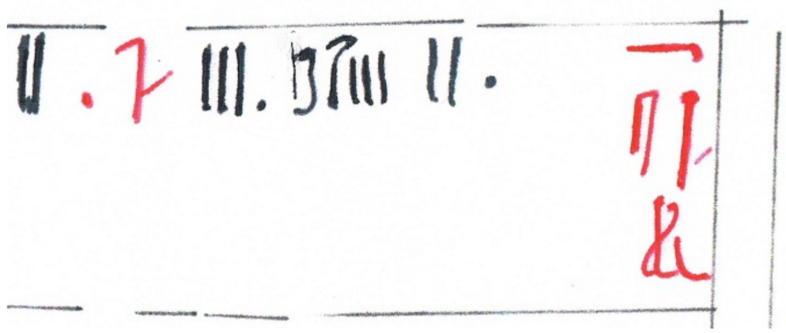
Expressions de 2 à partir de 3

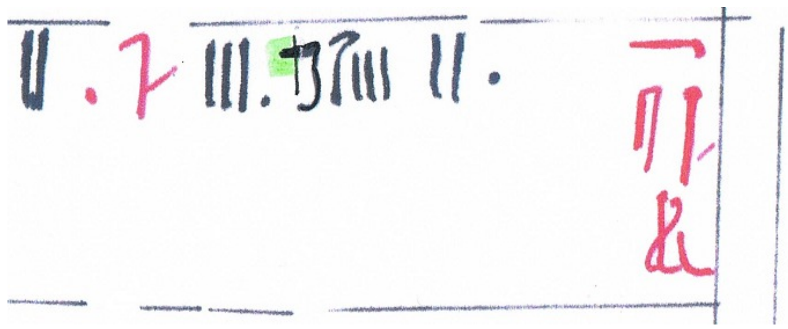
Avec le temps, le document a connu les injures de la vieillesse, les affres des manipulations nombreuses et hasardeuses, les restaurations anciennes ou plus récentes, quelquefois aventureuses. La graphie de *khénèt* (xnt) arrive à point nommé pour en fournir un premier et significatif exemple. Sur le *Fac-similé* du British Museum[1] de 1898, le *èn* (n) du complément phonétique est coupé par une brisure en son centre entraînant un manque de la trace noire du signe. Sur la photo produite par l'équipe formée autour de Chace[2], le è*n* (n) a gauchi et l'extrémité a disparu. Sur la planche 2 du même auteur, le *èn* (n) est horizontal et la brisure est apparente. Sur le cliché de Gay Robins et Charles Shute[3], la brisure est visible, le début du *èn* (n) est gauchi, son extrémité a disparu. Enfin sur le dernier travail de restauration du British Museum[4], on est à-peu-près dans le même cas de figure que la reproduction photographique précédente, mais le *èn* (n) est redressé. Que faire ? Il y a là un cas d'école pour notre travail. Nous devons effectuer un choix qui sera difficilement conforme à l'authenticité du document au moment de sa rédaction tout en étant au plus près de son état ultime au moment où nous travaillons. Face à cette difficulté et autant que faire se peut nous donnons l'état actuel, puis avec les restaurations, sur vert quand il y a effacement, et sur orange quand il y a une lacune. Dans le cas présent et ce sera aussi vrai par ailleurs, pour éviter le pédantisme nous donnons uniquement la version avec restitution comme c'est le cas ici où nous tenons compte du vieillissement, à savoir : laisser la brisure et le gauchissement mais en restituant la totalité du *èn* (n).

[1] British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. I.
[2] Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. I, pl. 2.
[3] Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 1.
[4] Voir le site du British Museum.

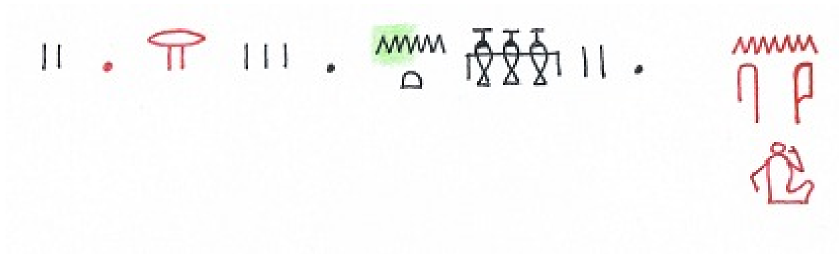
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



Restitution

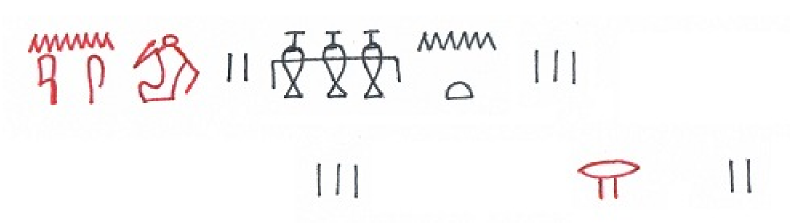


TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE

Autre[5]



[5] En général, nos transcriptions hiéroglyphiques libres sont semblables à nos adaptations. Nous adopterons cette deuxième présentation pour les autres exercices.

TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1 ***njs*** · *2 xnt* ·*3* ***3’’*** **·** *2*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1 ***nis*** · *2 khénèt* ·*3* ***3’’*** **·** *2*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 **nis₁**[1] ·[2] 2 khénèt₁[3] ·3 **3’’** ·[4] 2

1 — Pour la première occurrence du terme *nis* (njs), Âhmès écrit ce mot verticalement. Lors des *expressions de deux à partir d'un entier*, c'est la seule fois où la graphie apparaît dans son plus grand développement. Ensuite, en haut de chaque « page »[6] de ce *corpus*, le substantif sera rendu par le seul signe-mot de l'homme portant la main à la bouche (A2 dans la classification de Gardiner) alors que, dans la première occurrence, il a le rôle de déterminatif. Cette écriture complète de *nis* (njs) est présentée en colonne au début de chacune des deux premières lignes qui correspondent respectivement à R2/3 et R2/5. Nous avons considéré que ce terme appartient en fait à R2/3 et nous avons tout rapporté à la seule première ligne de l'écrit mathématique d'Âhmès.

2 — En écriture hiératique, le point comme signe d'écriture peut apparaître pour scander la prosodie : il s'agit d'apporter une respiration de la main et de ponctuer le texte, qu'il soit lu ou parlé. Dans le *Papyrus Rhind*, Âhmès écrit souvent des points, soit en noir, soit en rouge. Dans le corps du *ductus*, le scribe les met indifféremment à la base ou dans la partie médiane. Pour notre part, nous avons choisi de toujours les situer en partie médiane. Voir l'annexe CE : Écriture. Lors de nos traductions ou adaptations, nous n'avons pas pris en compte ces points.

3 — Les diverses reproductions qui ont été produites par le British Museum, soit dans le *Fac-similé*, soit photographiques, peuvent différer d'un document à l'autre. La raison principale est liée aux divers travaux de restauration qui ont été entrepris par ce musée. Ici, par exemple, ceci est visible dans la ligature des « lettres » *n* (n) et *t* (t). Comme en témoignent, les transcriptions hiératiques du British Museum et de Chace, il semble qu'il y ait eu une brisure à cet endroit. Lors d'une restauration, le recollement des bords a entraîné une moindre importance de la « lettre » *n* (n) et un certain gauchissement de la ligature.

4 — Âhmès a mis un point rouge devant le chiffre 2 qui est écrit en noir, ce qui est contraire aux autres présentations des *expressions de deux à partir d'un entier*. Toutefois, le caractère particulier de l'exercice R2/3 peut, ici, laisser entendre que le point rouge signifie la marque du résultat : le nombre 2 vaut le deux-tiers[7] de 3.

---

6 Rappelons que le mot « page » entre guillemets correspond à l'une des 9 pages du *corpus*.

7 Nous distinguons le nombre deux-tiers pour lequel nous mettons un trait d'union entre « deux » et « tiers » de l'expression deux tiers, sans trait d'union, qui peut signifier deux fois un tiers ou être utilisée dans la phrase « prendre les deux tiers d'une certaine quantité ». Nous parlons aussi du nombre un-tiers. Les nombres deux-tiers et un-tiers ont des notations hiératiques spécifiques et par suite ce sont des chiffres.

TRADUCTION

//$_1$ **Exprime** 2 à partir de 3 **3’’** 2

ADAPTATION

Exprime 2 à partir de 3			
	[3] [1]	**2/3**	2

1 — Il se peut que le scribe ait effectué une haplographie[8], c’est-à-dire, ici, qu’il ait volontairement omis de répéter le chiffre 3. Lors de notre adaptation, ayant scindé en deux l’écrit d’Âhmès, nous avons été amenés à le mettre aux deux endroits, d’une part, dans l’énoncé, et, d’autre part, dans les *expressions de deux à partir de 3*. En fait, dans nos adaptations, nous avons suivi des consignes générales : dissociation de l’énoncé et des expressions ainsi que refus de tenir compte des points de séparation.

[8] Voir, aussi, l’annexe E 4 : lexique des expressions de deux.

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 3 [9]

Le lecteur peut être surpris par les *expressions de 2 à partir de 3*. Selon notre traduction moderne cela revient à écrire seulement :

$$\boxed{\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad 3 \times \frac{2}{3} = 2}$$

égalités qui semblent dénuées d'intérêt. Pourtant, comme son lointain prédécesseur qui a écrit le *Fragment UC 32159-f = K IV. 2* [10]*de El-Lahoun*, Âhmès indique bien les trois chiffres, 3, 2/3 et 2. Plus pédagogue, il met quelques points de séparation, emploie l'écriture rouge pour noter ici notre 2/3 et introduit les données numériques par une expression générique. Qu'en est-il exactement ?

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 3

L'Auteur n'ajoute pas de complément. Cela peut se comprendre car une présentation *verticale* de la division de 2 par 3 n'apporterait rien de nouveau. En effet, nous aurions :

	1	3	(initialisation)
\	2/3	2	(« table de deux-tiers »[11])

La deuxième ligne serait théoriquement difficile à écrire puisqu'elle revient à utiliser le résultat que l'on veut obtenir sauf à mettre en avant une *table de deux-tiers* que nous aurons souvent l'occasion d'évoquer sans qu'un texte égyptien de cette sorte nous soit parvenu ! Toutefois, dans la plupart des exemples d'*expressions de deux à partir d'un entier*, lors du calcul, Âhmès donne à lire des présentations *verticales* abrégées dont le texte ci-dessus aurait pu être un représentant.

La nature particulière de l'exercice R2/3 ne donne pas lieu à une *vérification* ainsi qu'à un *manque*.

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/3

Aujourd'hui, nous pouvons dresser la liste de nombreuses décompositions de 2/3 en deux, trois ou quatre quantièmes. Nous pouvons citer, en particulier :

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\ ;\ \frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}\ ;\ \frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{21}+\frac{1}{126}\ ;\ \frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}\ ;$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}\ ;\ \frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}\ ;\ \frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{60}\ ;\ \frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}.$$

[9] Voir aussi l'annexe E 10 : décompositions relatives aux multiples impairs de trois.

[10] Nous donnons d'abord la nouvelle côte puis l'ancienne. Voir Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments, p. 93 ; http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk/lahun/ucarchivelahun/uc32159-f.jpg.

[11] Nous mettons « table de deux-tiers » entre guillemets pour souligner, d'une part, que le résultat peut être obtenu à partir d'une table de deux-tiers, mais que, d'autre part, dans le domaine égyptien aucune table de cette sorte ne nous est parvenue alors que nous en trouvons dans certains textes grecs.

La première relation est bien connue. Nous pouvons la qualifier de *fondamentale*. Quant aux autres, nous pouvons considérer qu'elles reviennent à moins bien écrire le *manque*, à savoir, le quantième 1/6.

Pour un *doublement ultérieur*[12] nous pouvons en déduire, immédiatement :

$$\frac{2}{3} \otimes 2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) \otimes 2 = (\frac{1}{2} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 3} \otimes 2) = 1 + \frac{1}{3}.$$

EN GUISE DE CONCLUSION

Compte tenu de leur caractère particulier, comme le font Livia Giacardi et Silvia Roero[13], les *expressions de 2 à partir de 3* peuvent être considérées comme étant étrangères au *corpus* des *expressions de deux à partir d'un entier*. Elles sont réduites au minimum : 3, **2/3**, 2. En fait, au **2/3** écrit en rouge peuvent correspondre les égalités

$$2 : 3 = 3'' \quad \text{ou} \quad 2 \times 3' = 3'' \quad \text{ou} \quad 3' + 3' = 3'',$$

où nous avons mis, à dessein, les notations employées dans nos translittérations et traductions, 3'' et 3', pour transcrire les écritures hiératiques respectives du deux-tiers et du un-tiers. Aujourd'hui, nous pouvons écrire :

$$2 : 3 = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Nous savons que, comme d'autres peuples, les anciens Égyptiens avaient un mot particulier pour désigner le nombre deux-tiers[14] : *r(a)ouy* (rwjj) littéralement *les deux parties*[15]. De plus, pour désigner deux-tiers, ils avaient des notations numériques spécifiques tant en écriture hiéroglyphique qu'en écriture hiératique, signes qui ont pu évoluer au gré des époques (voir l'annexe « Fractions »). Il en est de même pour le un-tiers. Le résultat est alors moins trivial qu'il n'y paraît. Nous pouvons apprendre que le signe spécifique 3'' est le résultat de la division de 2 par 3 ou qu'il est égal au double d'un autre signe particulier, celui qui désigne le quantième 3', ce que nous retrouvons dans l'appellation *deux parties*. Autrement dit, les égalités ci-dessus peuvent être lues sous la forme particulière suivante : *deux divisé par trois est égal à deux-tiers*[16] ou *deux fois le quantième 1/3 est égal à deux-tiers* ou encore *deux fois un-tiers est égal à deux-tiers* ce qui en souligne mieux l'intérêt. Rappelons que, dans le *Rouleau de Cuir*[17], nous avons la relation « *un-tiers, un-tiers, c'est deux-tiers* » à laquelle correspond, aujourd'hui, l'égalité

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

---

[12] Rappelons, qu'aujourd'hui, ce que nous nommons *doublement* peut être traduit sous la forme d'une multiplication par deux, opération pour laquelle nous utilisons une notation particulière : $\otimes 2$. Il se peut que les scribes égyptiens aient disposé de tables permettant d'en déduire immédiatement le résultat.

[13] Giacardi, Roero, 1979, *La matematica delle civiltà arcaiche, Egitto, Mesopotamia, Grecia*, pp. 77-78. Nous trouvons une attitude semblable dans Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, p. 100.

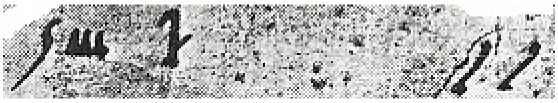
[14] Rappelons que nous distinguons le nombre deux-tiers pour lequel nous mettons un trait d'union entre deux et tiers de l'expression deux tiers, sans trait d'union, qui peut signifier deux fois un tiers ou être utilisée dans la phrase « prendre les deux tiers d'une certaine quantité ». Nous parlons aussi du nombre un-tiers.

[15] Voir, par exemple, Gardiner, *Egyptian Grammar*, § 265, p. 197. Voir aussi l'annexe E 5 : chiffres.

[16] En écrivant deux-tiers avec un trait d'union, nous mettons l'accent sur le nombre 2/3 employé par les scribes. Ainsi, lorsque nous envisageons, de manière hypothétique, l'utilisation d'une table de deux-tiers, nous mettons l'accent sur une table où figurerait le deux-tiers de divers nombres.

[17] Voir notre annexe DC : le Rouleau Mathématique de Cuir.

Extrait du Rouleau mathématique de cuir



pou (**pw**) 2/3 1/3 1/3

1/3 1/3 c'est 2/3

Quant au nombre 2 écrit en noir par Âhmès, il souligne l'*expression secondaire*

$$(3)(3'') = 3 \times \frac{2}{3} = 2 ,$$

soit *deux-tiers de trois est égal à deux*. Ce résultat entraîne le fait que, dans le cadre des *expressions de deux à partir d'un entier*, la *décomposition de deux* associée à 3 est triviale :

$$2 = 2 .$$

Jugées à l'aune de ces notations particulières les *expressions de deux à partir de trois* s'avèrent être nécessaires. Gillings se contente d'affirmer « *For* $2 \div 3$, *the scribe merely put* $\overline{\overline{3}}$, *even though be certainly knew he could have written* $\overline{2}$ $\overline{6}$ [18]». Il est un fait que les savants égyptiens connaissent la simplification de 1/2 1/6 en 2/3 (voir, par exemple, l'exercice R2/23 ou le problème R38) et nous aurons souvent l'occasion de l'utiliser dans nos commentaires. Mais nous savons aussi que l'Auteur donne la « meilleure *expression secondaire principale* ». Dès lors, même s'il avait obtenu 1/2 1/6 comme résultat de la division de 2 par 3, en opérant, par exemple, par *dédoublement*, comme il effectue cette simplification en R2/23 et en R38, il l'aurait transformé en 2/3. Autrement dit, il est exclu que l'Auteur considère des expressions de deux à partir de 3 liées à la réduction 1/2 1/6, ce qui l'aurait conduit à écrire un texte totalement différent pour lequel nous pouvons donner l'adaptation suivante :

Exprime 2 à partir de 3

3 **1/2** 1 1/2 **1/6** 1/2

Calcul

	1	3
\	1/2	1 1/2
\	1/6	1/2

Par ailleurs, Âhmès semble souligner le caractère particulier de l'exercice R2/3. Tout d'abord, c'est la seule fois où, d'une part, il écrit en noir le premier chiffre 2 et où, d'autre part, il met un point, en rouge, devant le deuxième nombre 2. Ensuite, nous pouvons aussi

[18] Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 53. Rappelons que, comme de nombreux auteurs, R. Gillings utilise les surlignements pour noter les quantièmes et un double surlignement pour transcrire le deux-tiers.

noter que pour toutes les occurrences de l'introduction des *expressions de deux à partir d'un entier*, c'est-à-dire celles qui figurent en haut de page, le point devant le premier chiffre 2 est absent sauf en R2/29 où Âhmès l'écrit en rouge comme le nombre qui le suit. Toutefois, comme nous pouvons trouver ces sortes de présentations différentes tout au long des *expressions de deux à partir d'un entier*, nous ne pouvons pas en déduire des conclusions bien assurées. Nous pouvons simplement les mettre en évidence. Néanmoins, la présence du point rouge devant le dernier nombre 2, peut être mise en relation avec l'écriture inhabituelle, en rouge, des traits de sommation dans l'exercice R2/5 qui suit : l'Auteur veut sans doute préciser qu'il s'agit d'un résultat.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 2-3.

British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. I.

Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.

Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 85, 87-88, 91.

Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, pp. 255-256, 258.

Bruins, 1981_2, Reducible and Trivial Decompositions Concerning Egyptian Arithmetics, pp. 286-287.

Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 28, 82, 86-87.

Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. I, pl. 2.

Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 50.

Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 122, 326.

Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 36, pl. I.

Giacardi, Roero, 1979, *La matematica delle civiltà arcaiche, Egitto, Mesopotamia, Grecia*, pp. 77-78.

Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 132.

Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 53.

Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 293.

Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, pp. 203-204.

Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, p. 100.

Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments : UC 32114B, UC 32118B, UC 32134A+B, UC 32159-UC 32162, *in* Collier, Quirk, 2004, *The UCL Lahun Papyri*, pp. 92-93.

Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.

Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, p. 99.

Midonick, 1968, *The Treasury of Mathematics*, p. 85.

Neugebauer, 1926, *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung*, p. 115.

Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 38, pl. A.

Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_1, p. 85.

Ritter, 2000, Egyptian mathematics *in* Selin, 2000, *Mathematics across cultures*, pp. 129-131.

Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 1-2.

Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 331.

Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363-364, 366.

Van der Waerden, 1980, The (2: n) Table in the Rhind Papyrus, pp. 259, 264.

Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 115.

Vogel, 1929, Erweitert die Lederrolle unsere Kenntnis ägyptischer Mathematik? p. 404.

Wieleitner, 1927, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, p. 233.