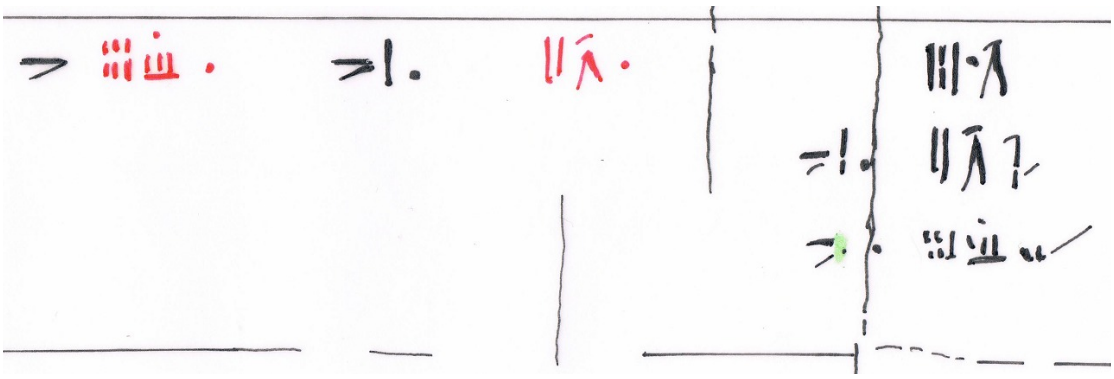
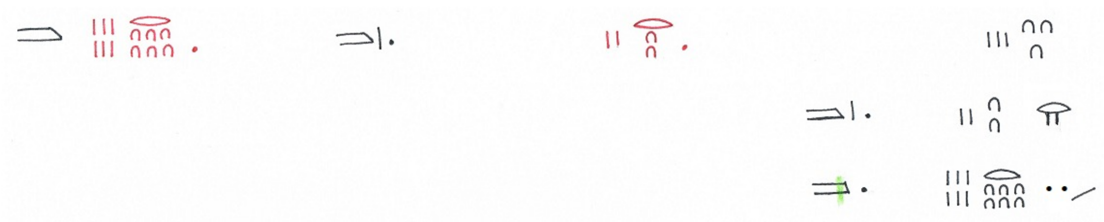
Expressions de 2 à partir de 33

Une brisure verticale court sur toute la bande, à la hauteur des points qui précèdent les résultats des calculs. Les derniers travaux de restauration ont tendance à affecter le sommet du demi à la dernière ligne.

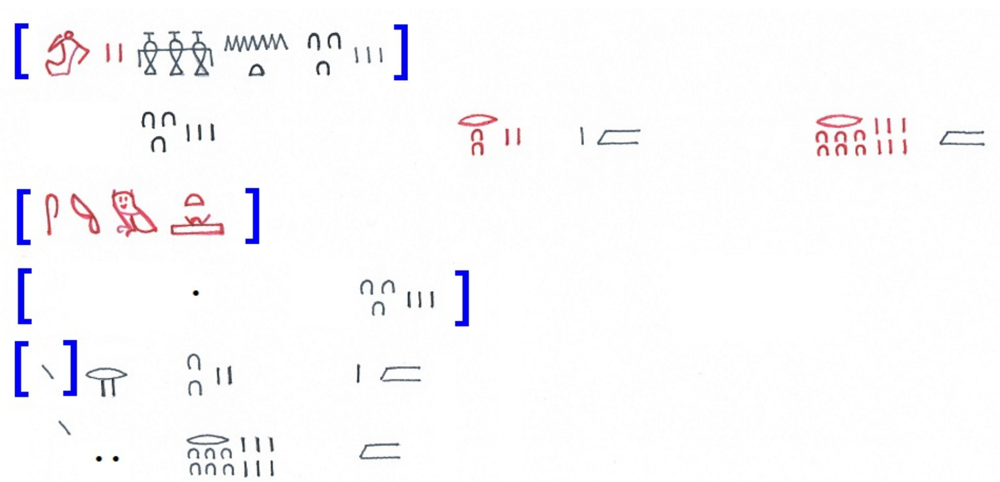
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L1 33 · **22’** · 1 2’ · **66’** 2’
L2 3” 22 · 1 2’
L3 \ 2 66’ · 2’

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

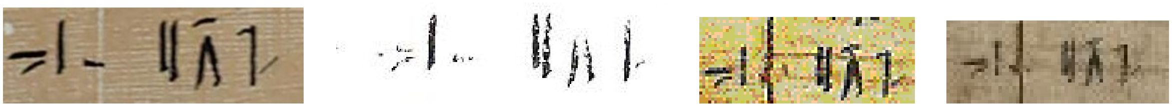
L1 33 · **22’** · 1 2’ · **66’** 2’
L2 3’’ 22 · 1 2’
L3 \ 2 66’ · 2’

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L1 33 · **22’** · 1 2’ ·[1] **66’** 2’
L2 3’’ 22 ·[2] 1 2’
L3 \ 2_1 66_1’ · 2’ [3]

1 — Eisenlohr, l’auteur du *Fac-similé*, Chace et W. Reineke ignorent ce point. Fidèle à sa ligne de conduite, Peet ne transcrit pas les points mis devant les nombres écrits en rouge. Néanmoins nous pouvons lire une légère trace rouge dans la reproduction photographique donnée par G. Robbins et C. Shute : celle de Chace est peu lisible à cet endroit. Elle est aussi présente dans la reproduction donnée sur le site du British Museum.

2 — Le point se présente sous la forme d’un petit trait horizontal. Il est rendu comme tel dans le *Fac-similé*, par Eisenlohr et Chace. Peet transcrit par un point. En fait, ce signe se trouve dans une brisure (voir les dernières reproductions du British Museum).



3 — Alors que tous les auteurs transcrivent le demi qui doit figurer à la fin de la dernière ligne, il semble, qu’aujourd’hui, il soit un peu effacé. Il se trouve près d’une brisure verticale.

Traduction LittÉrale

//$_1$		33	**22’**	1 2’	**66’**	2’
//$_2$	3’’	22	1 2’			
//$_3$	\ 2	66’	2’			

ADAPTATION

[Exprime 2 à partir de 33**]**

33 **1/22** 1 1/2 **1/66** 1/2

[Calcul]

	[1	33]
[\] 2/3	22	1 1/2
\ 2	1/66	1/2

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 33

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 33* sont :

$$\textbf{(d}_{33}\textbf{)}\quad \frac{2}{33}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66} \quad \text{et} \quad \textbf{(2}_{33}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}.$$

Pour exprimer les doublements éventuels, en utilisant **(d$_{11}$)** et **(d$_{33}$)**, nous obtenons des décompositions de 4/33 et de 8/33 qui sont, respectivement, en deux et trois quantièmes :

$$\frac{1}{33}\times 4=(\frac{1}{33}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{22}+\frac{1}{66})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 11}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 33}\otimes 2)=\frac{1}{11}+\frac{1}{33}\ ;$$

$$\frac{1}{33}\times 8=(\frac{1}{33}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{11}+\frac{1}{33})\otimes 2=(\frac{1}{11}\otimes 2)+(\frac{1}{33}\otimes 2)=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}=\frac{1}{6}+\frac{1}{22}+(\frac{1}{66}+\frac{1}{66})=\frac{1}{6}+\frac{1}{22}+\frac{1}{33}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 33

Les calculs écrits par Âhmès et la *décomposition de deux* **(2$_{33}$)** montrent que les expressions données par l'Auteur peuvent être rangées dans le cadre général des *décompositions de type « multiple de trois »*. Nous proposons la division suivante :

1	33	(initialisation)
2/3	22	(« table de deux-tiers »)
\ 1/22	1 1/2	(inversion)
Manque	1/2	**(2$_{33}$)**
\ 1/66	1/2	(inversion-multiplication)

Notons qu'Âhmès écrit le premier multiplicateur sous la forme d'un entier, tandis que pour le second il « préfère » celle d'un quantième. Nous trouvons aussi ce type d'exposition en R2/45, R2/63, R2/75 et R2/87. Comme toujours, nous ne savons pas s'il s'agit d'une option prise par Âhmès ou si cette attitude est celle suivie par le ou les auteurs qu'il recopie.

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/33

Le nombre 33 étant le produit de deux nombres premiers différents, à savoir 3 et 11, il existe trois autres *décompositions* de 2/33 en deux quantièmes distincts :

$$\textbf{(A}_{33}\textbf{)}\quad \frac{2}{33}=\frac{1}{17}+\frac{1}{561} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{33})+\frac{1}{17}\ ;$$

$$\textbf{(B}_{33}\textbf{)}\quad \frac{2}{33}=\frac{1}{18}+\frac{1}{198} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{6})+\frac{1}{6}\ ;$$

$$\textbf{(C}_{33}\textbf{)} \quad \frac{2}{33} = \frac{1}{21} + \frac{1}{77} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}).$$

Il existe aussi trois *décompositions égyptiennes simples* en trois quantièmes :

$$\textbf{(D}_{33}\textbf{)} \quad \frac{2}{33} = \frac{1}{18} + \frac{1}{297} + \frac{1}{594} = \frac{1}{18} + \frac{1}{33 \times 9} + \frac{1}{33 \times 18} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}) + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} \ ;$$

$$\textbf{(E}_{33}\textbf{)} \quad \frac{2}{33} = \frac{1}{20} + \frac{1}{132} + \frac{1}{330} = \frac{1}{20} + \frac{1}{33 \times 4} + \frac{1}{33 \times 10} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}) + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \ ;$$

$$\textbf{(F}_{33}\textbf{)} \quad \frac{2}{33} = \frac{1}{24} + \frac{1}{66} + \frac{1}{264} = \frac{1}{24} + \frac{1}{33 \times 2} + \frac{1}{33 \times 8} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

La décomposition **(A$_{33}$)** est *primaire* :

$$\textbf{(DP}_{33}\textbf{)} \quad \frac{2}{33} = \frac{2}{33+1} + \frac{2}{33 \times (33+1)} = \frac{1}{17} + \frac{1}{561} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{33}) + \frac{1}{17},$$

Son *quantième principal* étant égal à 1/17, nous ne nous étendrons pas davantage.

Théoriquement, la décomposition

$$\textbf{(B}_{33}\textbf{)} \quad \frac{2}{33} = \frac{1}{18} + \frac{1}{198},$$

se déduit de la décomposition **(d$_{11}$)** qui résulte des expressions données par l'Auteur en R2/11. En effet, nous pouvons écrire :

$$\frac{2}{33} = \frac{2}{3 \times 11} = \frac{2}{11} \times \frac{1}{3} = (\frac{1}{6} + \frac{1}{66}) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6 \times 3} + \frac{1}{66 \times 3} = \frac{1}{18} + \frac{1}{198}.$$

Il en résulte la même décomposition de deux, à savoir, **(2$_{11}$)** et la procédure suivante pour diviser 2 par 33 :

1	33	(initialisation)
2/3	22	(« table de deux-tiers »)
1/3	11	(dédoublement)
2/3 de 1/3	7 1/3	(« table de deux-tiers »)
1/3 de 1/3	3 2/3	(dédoublement et réduction de 1/2 1/6 en 2/3)
1/9	3 2/3	(simplification)
\ 1/18	1 1/2 1/3	(dédoublement)
Manque	1/6	**(2$_{11}$)**
\ 1/198	1/6	(inversion-multiplication)

Certes, nous suivons ainsi la voie empruntée en R2/11. Mais à quel prix ! Seul avantage, les *doublements éventuels* sont aisés

$$\frac{1}{33} \times 4 = (\frac{1}{33} \otimes 2) \otimes 2 = (\frac{1}{18} + \frac{1}{198}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 9} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 99} \otimes 2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{99} \ ;$$

$$\frac{1}{33}\times 8=(\frac{1}{33}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{9}+\frac{1}{99})\otimes 2=(\frac{1}{9}\otimes 2)+(\frac{1}{99}\otimes 2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{66}+\frac{1}{198}.$$

La décomposition **(C_{33})** est *composée* :

$$\textbf{(DC}_{33}\textbf{)}\quad \frac{2}{33}=\frac{2}{3\times 11}=\frac{2}{3\times(3+11)}+\frac{2}{11\times(3+11)}=\frac{1}{21}+\frac{1}{77}$$

$$\text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{14})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}),$$

Elle peut donner lieu aux vérifications suivantes :

\ 1	21	(initialisation)
\ 1/2	10 1/2	(dédoublement)
1/7	3	(division par sept)
\ 1/14	1 1/2 1/14	(dédoublement)

d'où

$$33:21=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{14},$$

et

1	77	(initialisation)
1/2	38 1/2	(dédoublement)
\ 1/4	19 1/4	
\ 1/7	11	(division par sept)
1/14	5 1/2	(dédoublement)
\ 1/28	2 1/2 1/4	

d'où

$$33:77=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}.$$

Quant aux *doublements éventuels*, en utilisant **(d_{21})** et **(d_{77})**, nous avons :

$$\frac{1}{33}\times 4=(\frac{1}{33}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{21}+\frac{1}{77})\otimes 2=(\frac{1}{21}\otimes 2)+(\frac{1}{77}\otimes 2)=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{44}+\frac{1}{308}\ ;$$

$$\frac{1}{33}\times 8=(\frac{1}{33}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{44}+\frac{1}{308})\otimes 2=$$

$$(\frac{1}{2\times 7}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 21}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 22}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 154}\otimes 2)=\frac{1}{7}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{154}.$$

La *décomposition égyptienne simple* en trois quantièmes

(D$_{33}$) $\frac{2}{33}=\frac{1}{18}+\frac{1}{264}+\frac{1}{792}=\frac{1}{18}+\frac{1}{33\times 9}+\frac{1}{33\times 18}$ avec $2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18})+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$,

peut être obtenue en utilisant deux fois le passage par deux-tiers, mais le *manque* est loin d'être immédiat. Nous ne poursuivons pas davantage. Elle revient en fait, à ne pas utiliser la simplification de 1/9 1/18 en 1/6 qui nous ramène à la décomposition **(B$_{33}$)**.

La *décomposition égyptienne simple* en trois quantièmes

(E$_{33}$) $\frac{2}{33}=\frac{1}{20}+\frac{1}{132}+\frac{1}{330}=\frac{1}{20}+\frac{1}{33\times 4}+\frac{1}{33\times 10}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20})+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}$,

peut être obtenue en utilisant la division auxiliaire par dix :

1	33	(initialisation)
1/10	3 1/5 1/10	(division par dix)
\ 1/20	1 1/2 1/10 1/20	(dédoublement)
Manque	1/4 1/10	
\ 1/132	1/4	(inversion-multiplication)
\ 1/330	1/10	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, en utilisant les « multiples de trois », nous avons

$$\frac{1}{33}\times 4=(\frac{1}{33}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{20}+\frac{1}{132}+\frac{1}{330})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 10}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 66}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 165}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{66}+\frac{1}{165}\ ;$$

$$\frac{1}{33}\times 8=(\frac{1}{33}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{10}+\frac{1}{66}+\frac{1}{165})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 5}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 33}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 55}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{33}+\frac{1}{110}+\frac{1}{330}.$$

Enfin, la *décomposition égyptienne simple* en trois quantièmes

(F$_{33}$) $\frac{2}{33}=\frac{1}{24}+\frac{1}{66}+\frac{1}{264}=\frac{1}{24}+\frac{1}{33\times 2}+\frac{1}{33\times 8}$ avec $2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$.

peut être obtenue en utilisant les *multiplicateurs ternaires* :

1	33	(initialisation)
2/3	22	(« table de deux-tiers »)
1/3	11	(dédoublement)
1/6	5 1/2	(dédoublement)
1/12	2 1/2 1/4	(dédoublement)
\ 1/24	1 1/4 1/8	(dédoublement)
Manque	1/2 1/8	
\ 1/66	1/2	(inversion-multiplication)

\ 1/264 1/8 (inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, nous avons

$$\frac{1}{33}\times 4=(\frac{1}{33}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{24}+\frac{1}{66}+\frac{1}{264})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 12}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 33}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 132}\otimes 2)=$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{33}+\frac{1}{132}\ ;$$

$$\frac{1}{33}\times 8=(\frac{1}{33}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{12}+\frac{1}{33}+\frac{1}{132})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 6}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 11}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 66}\otimes 2)=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}+\frac{1}{264}+\frac{1}{66}=\frac{1}{6}+\frac{1}{22}+(\frac{1}{66}+\frac{1}{66})+\frac{1}{264}=\frac{1}{6}+\frac{1}{22}+\frac{1}{33}+\frac{1}{264}\ .$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/33 et de 8/33 :

	(d_{33})	**(A_{33})**	**(B_{33})**	**(C_{33})**	**(D_{33})**	**(E_{33})**	**(F_{33})**
4/31	2	?	2	4	?	3	3
8/31	3	?	4	4	?	4	4

EN GUISE DE CONCLUSION

L'Auteur a donné des *expressions de type « multiple de trois »*. De l'étude que nous avons menée, il ressort que les expressions données par l'Auteur sont les plus commodes tant pour leur obtention *via* la procédure des « multiples de trois » que pour des *doublements éventuels*.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, p. 3.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. II-III.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 29.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. II-III, pl. 10.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 53.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 125-6, 330.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 39, pl. III.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, pp. 139-140.
Gunn, 1926_1, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 137.
Hultsch, 1895, Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung, pp. 38,70, 123-4.
Hultsch, 1901, Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, p. 181.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 102.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 41, pl. B.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{16}, p. 87.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 3.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 335.

Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, pp. 120-121.