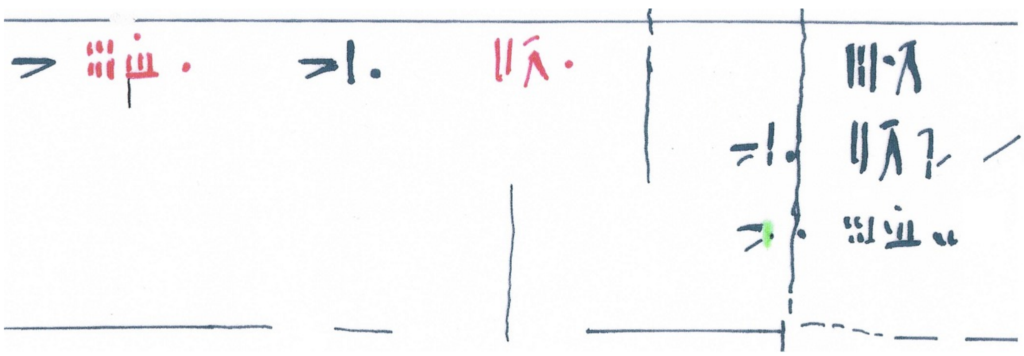
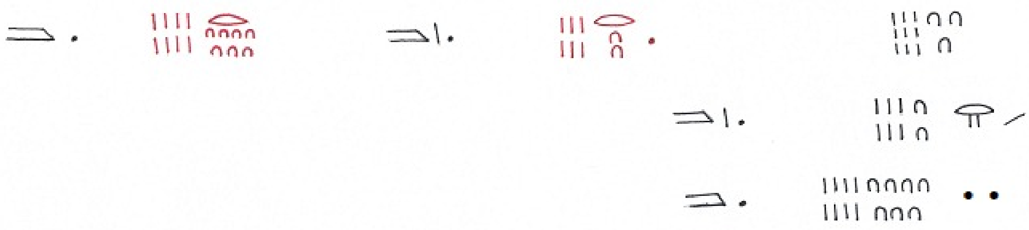
Expressions de 2 à partir de 39

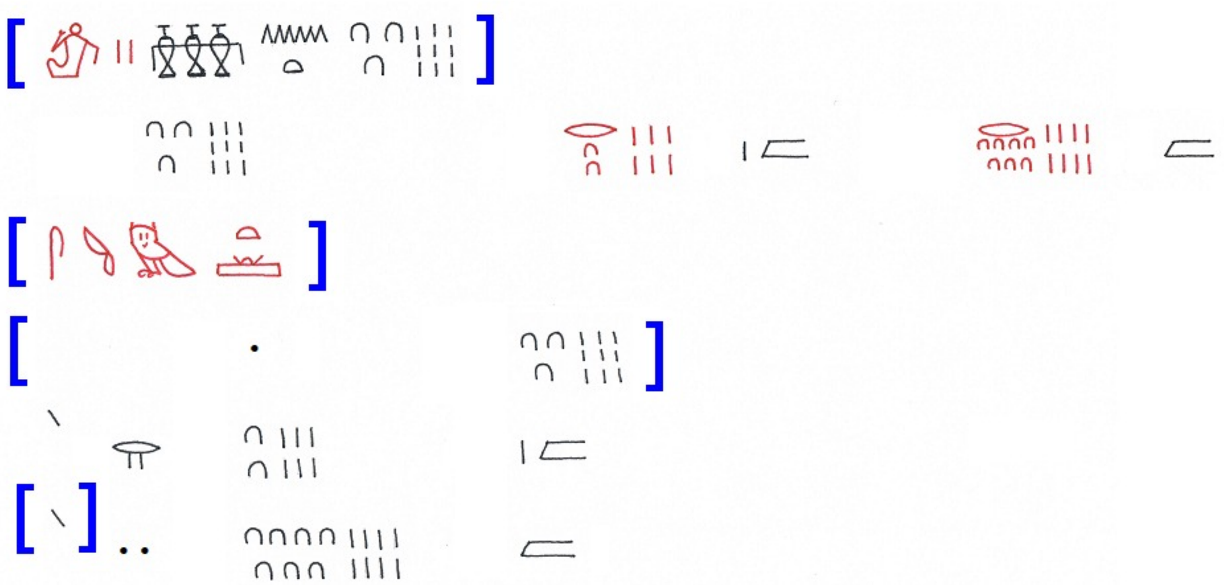
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L1 *39* ***· 26'*** *· 1 2'* ***78'*** *· 2'*
L2 *\ 3'' 26 · 1 2'*
L3 *2 78 · 2'*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L1 *39* ***· 26'*** *· 1 2'* ***78'*** *· 2'*
L2 *\ 3'' 26 · 1 2'*
L3 *2 78 · 2'*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L1 39 **· 26_1'** · 1 2' **78'** · 2'
L2 \ 3'' 26 · 1 2'
L3 2_1 78 · 2'

Traduction

//$_1$		39		**26’**	1 2’		**78’**	2’
//$_2$	\ 3’’	26 [1]	1 2’					
//$_3$	[2] 2	78 [1]	2’					

1 — Notons que, dans la partie calcul, les deux multiplicateurs, à savoir, 1/26 et1 /78, sont écrits sous la forme d’entiers. L’Auteur agira de même en R2/51, R2/57, R2/69 et R2/99.

2 — Âhmès ne trace pas le dernier trait de « sommation ». Pour les expressions de deux à partir d’un entier, il agira de même, seulement, en R2/99.

ADAPTATION

[Exprime 2 à partir de 39**]**

39	**1/26**	1 1/2	**1/78**	1/2

[Calcul]

	[1	39]
\ 2/3	1/26	1 1/2
[\] 2	78	1/2

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 39

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 39* sont :

$$\boxed{(\mathbf{d_{39}})\quad \frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78} \quad \text{et} \quad (\mathbf{2_{39}})\quad 2=(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}.}$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant **(d_{13})** et **(d_{39})**, nous obtenons des décompositions de 4/39 et de 8/39 qui sont ainsi, respectivement, en deux et cinq quantièmes :

$$\frac{1}{39}\times 4=(\frac{1}{39}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{26}+\frac{1}{78})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 13}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 39}\otimes 2)=\frac{1}{13}+\frac{1}{39}\ ;$$

$$\frac{1}{39}\times 8=(\frac{1}{39}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{13}+\frac{1}{39})\otimes 2=(\frac{1}{13}\otimes 2)+(\frac{1}{39}\otimes 2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}+\frac{1}{26}+\frac{1}{78}.$$

Aujourd'hui, nous pouvons simplifier cette dernière expression car

$$(\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{78}+\frac{1}{104})+\frac{1}{26}=\frac{1}{6}+\frac{1}{26}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 39

Les calculs écrits par Âhmès et la *décomposition de deux* **(2_{39})** montrent que les expressions données par l'Auteur peuvent être rangées dans le cadre général des *décompositions de type « multiple de trois »*. Nous proposons la division suivante :

1	39	(initialisation)
2/3	26	(« table de deux-tiers »)
\ 1/26	1 1/2	(inversion)
Manque	1/2	**(2_{39})**
\ 1/78	1/2	(inversion-multiplication)

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/39

Le nombre 39 étant le produit de deux nombres premiers différents, à savoir 3 et 13, il existe trois autres *décompositions* de 2/39 en deux quantièmes distincts :

$$(\mathbf{A_{39}})\quad \frac{2}{39}=\frac{1}{20}+\frac{1}{780}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})+\frac{1}{20}\ ;$$

$$(\mathbf{B_{39}})\quad \frac{2}{39}=\frac{1}{21}+\frac{1}{273}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28})+\frac{1}{7}\ ;$$

$$(\mathbf{C_{39}})\quad \frac{2}{39}=\frac{1}{24}+\frac{1}{104}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}).$$

Il existe aussi trois *décompositions égyptiennes simples* en trois quantièmes :

(D_{39}) $\frac{2}{39}=\frac{1}{24}+\frac{1}{117}+\frac{1}{936}=\frac{1}{24}+\frac{1}{39\times 3}+\frac{1}{39\times 24}$ avec $2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24})+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$;

(E_{39}) $\frac{2}{39}=\frac{1}{24}+\frac{1}{156}+\frac{1}{312}=\frac{1}{24}+\frac{1}{39\times 4}+\frac{1}{39\times 8}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8})+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$;

(F_{39}) $\frac{2}{39}=\frac{1}{30}+\frac{1}{78}+\frac{1}{195}=\frac{1}{30}+\frac{1}{39\times 2}+\frac{1}{39\times 5}$ avec $2=(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{10})+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$.

La décomposition **(A_{39})** est *primaire* :

(DP_{39}) $\frac{2}{39}=\frac{2}{39+1}+\frac{2}{39\times(39+1)}=\frac{1}{20}+\frac{1}{780}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})+\frac{1}{20}$.

Quant aux *doublements éventuels*, nous avons, immédiatement des expressions beaucoup plus simples que celles que nous avons obtenues à partir des propos de l'Auteur :

$$\frac{1}{39}\times 4=(\frac{1}{39}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{20}+\frac{1}{780})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 10}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 390}\otimes 2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{390},$$

$$\frac{1}{39}\times 8=(\frac{1}{39}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{10}+\frac{1}{390})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 5}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 195}\otimes 2)=\frac{1}{5}+\frac{1}{195}.$$

Théoriquement, nous pouvons donc nous étonner que cette décomposition n'ait pas été retenue et ce d'autant plus qu'elle est *simple*. En effet, en particulier, nous avons :

$$Q=\frac{39}{20}=1+\frac{19}{20}=1+\frac{10+5+4}{20}=1+\frac{10}{20}+\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}.$$

Toutefois, pratiquement, il est difficile d'obtenir cette décomposition pour l'*expression secondaire principale*. En effet, lors de la division de 2 par 39, le *quantième principal* étant égal à 1/20, nous savons que les outils principaux sont la *division par dix* et le *dédoublement*. Or, quel que soit l'ordre de ces deux opérations auxiliaires, nous utilisons le résultat correspondant au dixième du nombre 9, ce qui est source de difficultés. Par exemple, si l'on commence par utiliser les dixièmes, nous pouvons écrire :

1	39	(initialisation)
1/10	3 2/3 1/5 1/30	(division par dix et *table de dixièmes*)
\ 1/20	1 1/2 1/3 1/10 1/60	(dédoublement)
Manque	1/20	
\ 1/780	1/20	(inversion-multiplication)

Nous avons alors une autre décomposition de deux

$$2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{60})+\frac{1}{20},$$

et c'est presque un hasard que le manque soit réduit à un quantième. On doit utiliser les *auxiliaires numériques* pour parvenir à un tel résultat. Aujourd'hui nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{60}=\frac{30+20+6+1}{60}=\frac{57}{60} \quad \text{et} \quad 1-\frac{57}{60}=\frac{60-57}{60}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}.$$

Si, maintenant, nous commençons par le dédoublement, nous avons ;

1	39	(initialisation)
1/2	19 1/2	(dédoublement)
\ 1/20	1 2/3 1/5 1/30 1/20	(division par dix et « *table de dixièmes* »)
Manque	1/20	
\ 1/780	1/20	(inversion-multiplication)

Cette fois, nous pouvons écrire :

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+(\frac{1}{5}+\frac{1}{20})+(\frac{1}{6}+\frac{1}{30})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}.$$

Par ailleurs, si nous prenons en compte les premiers éléments de la décomposition de deux, alors, nous pouvons penser raisonner par *dédoublements successifs*, mais nous obtenons une autre décomposition avec un quantième supérieur à 1/1000 :

$$\frac{2}{39}=\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{1056} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32})+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}.$$

En fait, nous sommes en présence d'une décomposition qui, *a priori*, est aisée à obtenir et qui, dans la pratique est source de difficultés pour ne pas dire qu'elle est presque impossible à obtenir. Toutefois, en commençant par le dédoublement et en utilisant deux simplifications assez courantes, nous avons pu parvenir à l'expression souhaitée. Quant à l'établissement du *manque*, puisque nous avons pris le dixième de 9, nous avons un *manque partiel* de 1/10 et comme nous devons encore considérer le dixième de 1/2, soit 1/20, le *manque* est bien égal à 1/20 :

$$M=2-(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20})=$$

$$\left[1-(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30})\right]-\frac{1}{20}=(1-\frac{9}{10})-\frac{1}{20}=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=(\frac{1}{20}+\frac{1}{20})-\frac{1}{20}=\frac{1}{20}.$$

Notons que d'autres tables de dixièmes[1] donnent des résultats différents pour l'expression du dixième de 9. Si nous prenons 1/2 1/3 1/15, nous pouvons obtenir l'expression secondaire principale cherchée en procédant comme suit :

1	39	(initialisation)
1/10	3 1/2 1/3 1/15	(division par dix)
\ 1/20	1 1/2 1/4 1/5	(dédoublement et R2/5)
Manque	1/20	
\ 1/780	1/20	(inversion-multiplication)

En effet, d'après R2/5, le double de 1/5 peut s'écrire 1/3 1/15, et, par suite la moitié de cette expression est 1/5. Ce cas particulier est un bon exemple des limites de certaines reconstructions. De manière générale, il n'est pas exclu que l'application d'autres expressions ou l'utilisation d'autres procédés puisse conduire à des résultats différents.

La décomposition

$$\mathbf{(B_{39})} \quad \frac{2}{39}=\frac{1}{21}+\frac{1}{273} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28})+\frac{1}{7},$$

[1] Voir, dans les exemples, « Autour de la *table de dixièmes* ».

revient, théoriquement, à utiliser la *décomposition primaire* de 2/13 en deux quantièmes distincts

$$\textbf{(DP}_{13}\textbf{)}\quad \frac{2}{13}=\frac{2}{13+1}+\frac{2}{13\times(13+1)}=\frac{2}{14}+\frac{2}{182}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28})+\frac{1}{7},$$

décomposition que l'Auteur n'a pas « retenue ». En effet, d'après **(DP$_{13}$)**, nous avons :

$$\frac{2}{39}=\frac{2}{3\times13}=\frac{2}{13}\times\frac{1}{3}=(\frac{1}{7}+\frac{1}{91})\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7\times3}+\frac{1}{91\times3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{273}.$$

Nous pouvons lui associer la division suivante :

	1	39	(initialisation)
	2/3	26	(« table de deux-tiers »)
\	1/3	13	(dédoublement)
	1/7 de 1/3	1 1/2 1/4 1/14 1/28	(division par sept)
	1/21	1 1/2 1/4 1/14 1/28	(multiplication-simplification)
	Manque	1/7	
\	1/273	1/7	(inversion-multiplication)

Cette décomposition **(B$_{39}$)** présente, sans doute, peu d'intérêt car, d'une part, son *quantième principal* étant égal à 1/21, on doit passer par les *multiplicateurs ternaires* que l'on retrouve dans les dernières décompositions et, d'autre part, les *doublements éventuels* donnent lieu à des expressions assez complexes si l'on n'effectue pas certaines simplifications qui, par ailleurs, sont sans doute inconnues des scribes égyptiens :

$$\frac{1}{39}\times4=(\frac{1}{39}\otimes2)\otimes2=(\frac{1}{21}+\frac{1}{273})\otimes2=(\frac{1}{21}\otimes2)+(\frac{1}{3\times91}\otimes2)=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{182}+\frac{1}{546}$$
$$=(\frac{1}{14}+\frac{1}{182})+(\frac{1}{42}+\frac{1}{546})=\frac{1}{13}+\frac{1}{39}\;;$$

$$\frac{1}{39}\times8=(\frac{1}{39}\times4)\otimes2=(\frac{1}{13}+\frac{1}{39})\otimes2=(\frac{1}{13}\otimes2)+(\frac{1}{39}\otimes2)=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}+\frac{1}{21}+\frac{1}{63}.$$

La décomposition **(C$_{39}$)** est *composée*

$$\textbf{(DC}_{39}\textbf{)}\quad \frac{2}{39}=\frac{2}{3\times13}=\frac{2}{3\times(3+13)}+\frac{2}{13\times(3+13)}=\frac{1}{3\times8}+\frac{1}{13\times8}=\frac{1}{24}+\frac{1}{104}.$$

Ses deux quantièmes sont des inverses de multiples de huit ce qui facilite la conduite des divisions de 39 par 24 et par 104 ainsi que les expressions des *doublements éventuels*

\	1	24	(initialisation)
	1/2	12	(dédoublement)

\ 1/4	6	(dédoublement)
\ 1/8	3	(dédoublement)
Total	29	

1	104	(initialisation)
1/2	52	(dédoublement)
\ 1/4	26	(dédoublement)
\ 1/8	13	(dédoublement)
Total	29	

$$\frac{1}{39}\times 4=(\frac{1}{39}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{24}+\frac{1}{104})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 12}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 52}\otimes 2)=\frac{1}{12}+\frac{1}{52},$$

$$\frac{1}{39}\times 8=(\frac{1}{39}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{12}+\frac{1}{52})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 6}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 26}\otimes 2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{26}.$$

Les *décompositions égyptiennes simples* en trois quantièmes **(D_{39})** et **(E_{39})** ont, comme **(C_{39})**, 1/24 pour *quantième principal*. Elles peuvent facilement être obtenues en divisant 2 par 39 en utilisant des *multiplicateurs ternaires* pour la première et des *dédoublements successifs* pour la seconde. Quant aux *doublements éventuels*, en effectuant certaines simplifications, nous parvenons à celle obtenues à partir de **(C_{39})**.

Enfin, la *décomposition égyptienne simple* en trois quantièmes

(F_{39}) $$\frac{2}{39}=\frac{1}{30}+\frac{1}{78}+\frac{1}{195}=\frac{1}{30}+\frac{1}{39\times 2}+\frac{1}{39\times 5}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{10})+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}.$$

peut être obtenue en utilisant la division auxiliaire par dix et en procédant comme suit :

1	39	(initialisation)
2/3	26	(« table de deux-tiers »)
1/3	13	(dédoublement)
1/10 de 1/3	1 1/5 1/10	(division par dix)
\ 1/30	1 1/5 1/10	(multiplication-simplification)
Manque	1/2 1/5	
\ 1/78	1/2	(inversion-multiplication)
\ 1/195	1/5	(inversion-multiplication)

D'une part, nous devons passer par le multiplicateur deux-tiers et les « multiples de trois » et, d'autre part, sauf simplifications qui sont, sans doute, inconnues des scribes égyptiens, les expressions des *doublements éventuel*s sont plus complexes :

$$\frac{1}{39}\times 4=(\frac{1}{39}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{30}+\frac{1}{78}+\frac{1}{195})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 15}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 39}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 65}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{39}+\frac{1}{130}+\frac{1}{390}=\frac{1}{15}+(\frac{1}{39}+\frac{1}{130})+\frac{1}{390}=(\frac{1}{15}+\frac{1}{30})+\frac{1}{390}=\frac{1}{10}+\frac{1}{390}.$$

On retrouve l'expression obtenue à partir de **(C_{39})**. Sans simplifications, nous avons :

$$\frac{1}{39}\times 8=(\frac{1}{39}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{15}+\frac{1}{39}+\frac{1}{130}+\frac{1}{390})\otimes 2=$$
$$=(\frac{1}{15}\otimes 2)+(\frac{1}{39}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 65}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 195}\otimes 2)=$$
$$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{78}+\frac{1}{195}+\frac{1}{65}+\frac{1}{195}=(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})+(\frac{1}{65}+\frac{1}{78}+\frac{1}{130}+\frac{1}{390})=\frac{1}{6}+\frac{1}{26}.$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/39 et de 8/39 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

	(d_{39})	**(A_{39})**	**(B_{39})**	**(C_{39})**	**(D_{39})**	**(E_{39})**	**(F_{39})**
4/39	2	2	2	2	<u>**2**</u>	<u>**2**</u>	<u>**2**</u>
8/39	5 <u>**3**</u>	2	4	2	<u>**2**</u>	<u>**2**</u>	<u>**2**</u>

EN GUISE DE CONCLUSION

L'Auteur a donné des *expressions de type « multiple de trois »*. Une fois de plus, le procédé des « multiples de trois » prévaut. Toutefois, nous pouvons remarquer que les expressions des *doublements éventuels* sont fort complexes à moins d'utiliser une simplification qui est sans doute inconnue des savants égyptiens. Nous avons pu constater que la *décomposition composée*

(DC_{39}) $\frac{2}{39}=\frac{1}{24}+\frac{1}{104}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{8})$.

ainsi que la *décomposition primaire*

(DP_{39}) $\frac{2}{39}=\frac{1}{20}+\frac{1}{780}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})+\frac{1}{20}$;

sont, pour cette application, plus efficaces. Aujourd'hui, elles pourraient avoir notre préférence, bien que la dernière donne lieu à certaines difficultés pratiques. Notons que ces deux décompositions ont un quantième plus petit que 1/78, dernier quantième de **(d_{39})**.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 11.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. II-III.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 30.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. III, pl. 11.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 54.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 126, 331.

Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 39, pl. III.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, pp. 141-142.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 61.
Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 207.
Gunn, 1926_{1}, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 137.
Hultsch, 1901, Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, p. 183.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 102.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 42, pl. B.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{19}, p. 87.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 3-4.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 335.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, pp. 121-122.