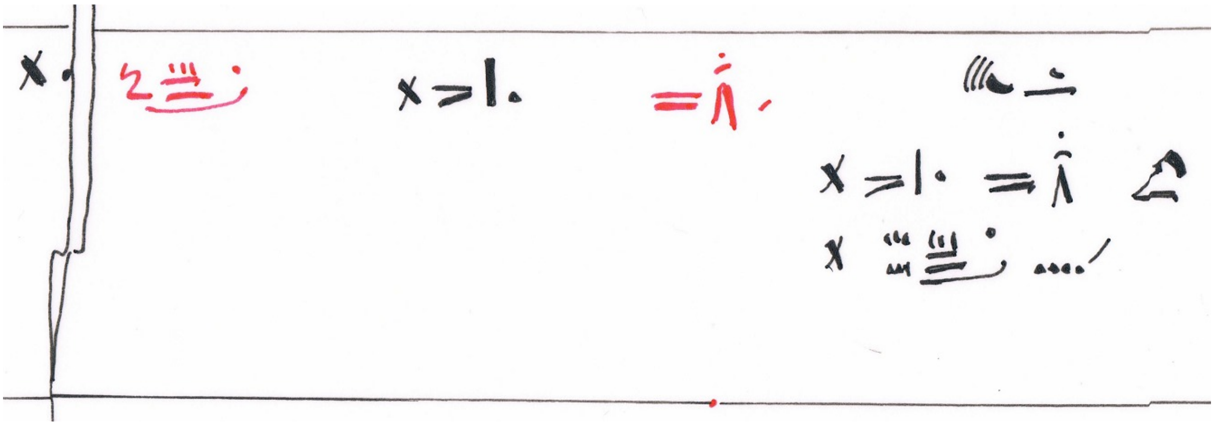
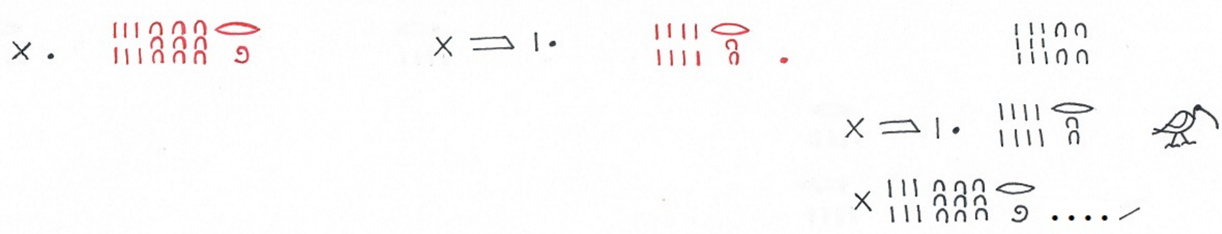
Expressions de 2 à partir de 49

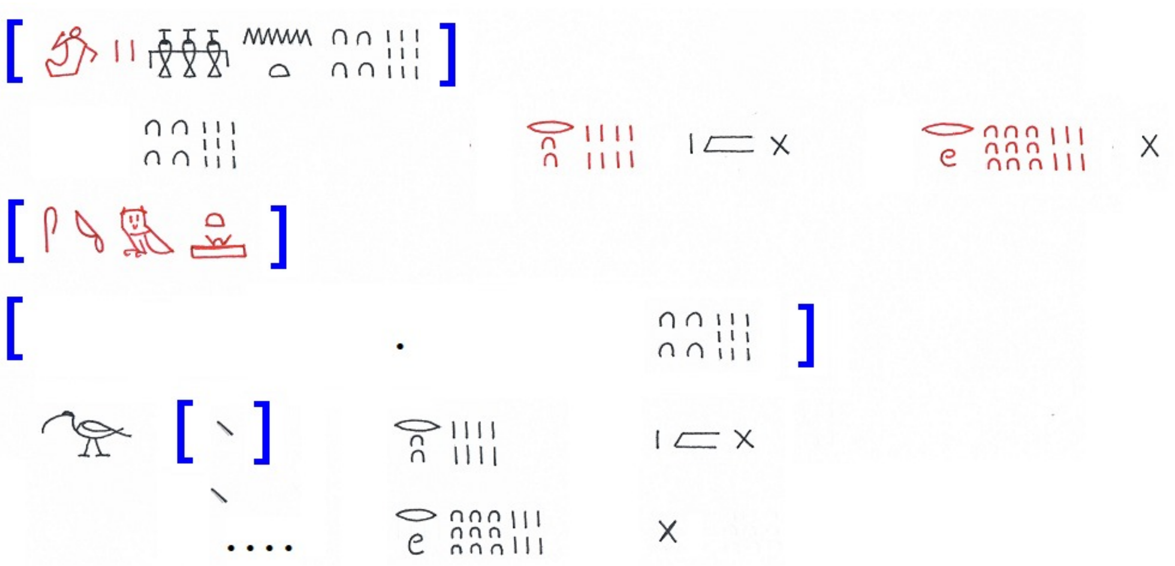
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1 *49* ***· 28’*** *· 1 2’ 4’* ***196’*** *· 4’*
L_2 *gm 28’ · 1 2’ 4’*
L_3 *\ 4 196’ 4’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1 *49* ***· 28’*** *· 1 2’ 4’* ***196’*** *· 4’*
L_2 *gèm 28’ · 1 2’ 4’*
L_3 *\ 4 196’ 4’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 49 **· 28’** · 1 2’ 4’ **196_2’** · 4’
L_2 gèm$_1$ 28’ · 1 2’ 4’
L_3 \ 4_1 196’ 4’

Traduction

//1		49			**28’**	1 2’ 4’	**196’**	4’
//2	Vérifie !		28’	1 2’ 4’				
//3		\ 4	196’	4’				

ADAPTATION

[**Exprime 2** à partir de 49]

	49		**1/28**	1 1/2 1/4	**1/196**	1/4

[**Calcul**]

			[1	49]
Vérifie !		[\]	1/28	1 1/2 1/4
	\ 4		1/196	1/4

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 49

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 49* sont :

$$\textbf{(d}_{49}\textbf{)}\quad \frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_{7}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}\,.$$

L'expression des *doublements éventuels* est immédiate :

$$\frac{1}{49}\times 4=(\frac{1}{49}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{28}+\frac{1}{196})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 14}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 98}\otimes 2)=\frac{1}{14}+\frac{1}{98},$$

$$\frac{1}{49}\times 8=(\frac{1}{49}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{14}+\frac{1}{98})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 7}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 49}\otimes 2)=\frac{1}{7}+\frac{1}{49}\,.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 49

L'Auteur ne nous fournit aucune explication pouvant nous permettre de savoir comment il a effectué la division de 2 par 49 et, plus, particulièrement, pourquoi il a considéré le multiplicateur 1/28 et comment il a obtenu l'*expression secondaire* correspondante. Mieux, il nous invite à effectuer une vérification, qui, ici, est immédiate. Nous sommes donc conduits à formuler plusieurs hypothèses. Théoriquement, aujourd'hui, nous pouvons noter que le nombre 49 est le carré du nombre 7 :

$$49=7\times 7=7^2\,.$$

Nous n'avons pas connaissance d'un document égyptien comportant une table de nombres carrés. Toutefois, des écrits de ce type nous sont parvenus pour les civilisations mésopotamiennes ou grecques. Ceci nous pousse à penser que les scribes égyptiens en possédaient. Sous cette hypothèse, nous pouvons présenter et commenter la procédure suivante pour diviser 2 par 49, technique qui s'apparente aussi au procédé général qui conduit aux *décompositions de type « multiple de sept »*[1] et pour laquelle nous considérons alors la division par sept :

1	49	(initialisation)
1/7	7	(division par sept ou « table de carrés »)
1/14	3 1/2	(dédoublement)
\ 1/28	1 1/2 1/4	(dédoublement)
Manque	1/4	**(2$_7$)**
\ 1/196	1/4	(inversion-multiplication)

Contrairement à ce qui a lieu pour le nombre carré 25, il est plus difficile d'envisager d'autres procédures pour diviser 2 par 49 permettant d'obtenir ainsi 1/28 comme *quantième principal*. Toutefois, nous pouvons considérer l'introduction du multiplicateur 1/7 après deux dédoublements :

[1] Voir aussi l'annexe E 12 : décompositions pour les multiples impairs de sept.

	1	49	(initialisation)
	1/2	24 1/2	(dédoublement)
	1/4	12 1/4	(dédoublement)
	1/7 de 1/4	1 1/2 1/7 1/14 1/28	(division par sept)
\	1/28	1 1/2 1/4	(simplifications)
	Manque	1/4	**(2_7)**
\	1/196	1/4	(inversion-multiplication)

VÉRIFICATION

Théoriquement, l'*expression secondaire principale* peut être considérée comme étant le résultat de la division de 49 par 28. Selon la procédure employée, elle peut donc avoir diverses formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* où les quantièmes de cette expression sont des multiples du *quantième principal*, nous avons la seule décomposition « utile » suivante :

$$Q = \frac{49}{28} = 1 + \frac{21}{28} = 1 + \frac{14+7}{28} = 1 + \frac{14}{28} + \frac{7}{28} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

L'expression à l'aide des quantièmes *binaires* nous engage dans la voie des *dédoublements successifs* et donc à procéder comme suit :

\	1	28	(initialisation)
\	1/2	14	(dédoublement)
\	1/4	7	(dédoublement)
	Total	49	

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/49

Le nombre 49 étant le carré d'un nombre premier impair il existe une seule autre décomposition de 2/49 en deux quantièmes distincts, la *décomposition primaire*[2] :

$$\textbf{(DP}_{49}\textbf{)} \quad \frac{2}{49} = \frac{2}{49+1} + \frac{2}{49\times(49+1)} = \frac{1}{25} + \frac{1}{1225}.$$

Le dernier quantième est très petit pour que nous la prenions en considération.

Il existe deux *décompositions égyptiennes simples* en trois quantièmes de 2/49 :

$$\textbf{(A}_{49}\textbf{)} \quad \frac{2}{49} = \frac{1}{30} + \frac{1}{245} + \frac{1}{294} = \frac{1}{30} + \frac{1}{49\times5} + \frac{1}{49\times6} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}) + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \;;$$

$$\textbf{(B}_{49}\textbf{)} \quad \frac{2}{49} = \frac{1}{42} + \frac{1}{98} + \frac{1}{147} = \frac{1}{42} + \frac{1}{49\times2} + \frac{1}{49\times3} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{6}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

[2] Voir aussi l'annexe E 7 : décompositions primaires.

Le *quantième principal* de la décomposition

$$\textbf{(A}_{49}\textbf{)}\quad \frac{2}{49}=\frac{1}{30}+\frac{1}{245}+\frac{1}{294}=\frac{1}{30}+\frac{1}{49\times 5}+\frac{1}{49\times 6}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30})+\frac{1}{5}+\frac{1}{6},$$

étant égal à 1/30, nous pouvons parvenir aux expressions correspondantes en procédant comme suit :

1	49	(initialisation)
2/3	32 2/3	(« table de deux-tiers »)
1/3	16 1/3	(dédoublement)
1/10 de 1/3	1 1/2 1/10 1/30	(division par dix)
\ 1/30	1 1/2 1/10 1/30	(réduction)
Manque	1/5 1/6	(2_{91} ?)
\ 1/245	1/5	(inversion-multiplication)
\ 1/294	1/6	(inversion-multiplication)

Pour les *doublements éventuels*, nous obtenons des expressions comportant un grand nombre de quantièmes distincts :

$$\frac{1}{49}\times 4=(\frac{1}{49}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{30}+\frac{1}{245}+\frac{1}{294})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 15}\otimes 2)+(\frac{1}{5\times 49}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 147}\otimes 2)=$$

$$\frac{1}{15}+(\frac{1}{147}+\frac{1}{735})+\frac{1}{147}=\frac{1}{15}+(\frac{1}{147}+\frac{1}{147})+\frac{1}{735}=\frac{1}{15}+\frac{1}{98}+\frac{1}{294}+\frac{1}{735};$$

$$\frac{1}{49}\times 8=(\frac{1}{49}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{15}+\frac{1}{98}+\frac{1}{294}+\frac{1}{735})\otimes 2=$$

$$=(\frac{1}{15}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 49}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 147}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 245}\otimes 2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{49}+\frac{1}{147}+\frac{1}{490}+\frac{1}{1470}.$$

La *décomposition égyptienne simple* en trois termes,

$$\textbf{(B}_{49}\textbf{)}\quad \frac{2}{49}=\frac{1}{42}+\frac{1}{98}+\frac{1}{147}=\frac{1}{42}+\frac{1}{49\times 2}+\frac{1}{49\times 3}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{6})+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

a pour *quantième principal* 1/42. Nous sommes aussi obligés de considérer le multiplicateur 1/7. De plus, elle peut correspondre à l'expression suivante de 2/7 que nous ne trouvons pas en R2/7 :

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}.$$

Enfin, sauf réductions qui conduisent aux résultats obtenus à partir de la décomposition donnée par l'Auteur, les expressions des *doublements éventuels* comportent aussi un grand nombre de quantièmes :

$$\frac{1}{49}\times 4=(\frac{1}{49}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{42}+\frac{1}{98}+\frac{1}{147})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 21}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 49}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 49}\otimes 2)=$$
$$\frac{1}{21}+\frac{1}{49}+\frac{1}{98}+\frac{1}{294}=\frac{1}{21}+(\frac{1}{49}+\frac{1}{294})+\frac{1}{98}=(\frac{1}{21}+\frac{1}{42})+\frac{1}{98}=\frac{1}{14}+\frac{1}{98}\ ;$$

$$\frac{1}{49}\times 8=(\frac{1}{49}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{21}+\frac{1}{49}+\frac{1}{98}+\frac{1}{294})\otimes 2=$$
$$=(\frac{1}{21}\otimes 2)+(\frac{1}{49}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 49}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 147}\otimes 2)=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{42}+\frac{1}{98}+\frac{1}{147}+\frac{1}{49}+\frac{1}{147}=$$
$$=\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\frac{1}{49}+\frac{1}{98}+\frac{1}{98}+\frac{1}{294}=\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\frac{1}{42}+\frac{1}{49}=\frac{1}{7}+\frac{1}{49}.$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/49 et de 8/49 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

	(d_{49})	**(A_{49})**	**(B_{49})**
4/49	2	4	4
8/49	2	6	<u>**2**</u>

EN GUISE DE CONCLUSION

Une fois de plus nous sommes obligés de naviguer entre des réflexions plus ou moins théoriques et des considérations pratiques. Aujourd'hui, nous savons qu'en dehors de la *décomposition primaire* qui conduit à un dernier quantième très petit, il existe seulement une autre décomposition en deux quantièmes distincts, la *décomposition de type « nombre carré »*[3]

$$\textbf{(DPC)}\quad \frac{2}{p^2}=\frac{2}{p(p+1)}+\frac{2}{p^2(p+1)},$$

ou *de type « multiple de sept »*

$$\textbf{(DM7)}\quad \frac{2}{7k}=\frac{1}{4k}+\frac{1}{28k}.$$

D'un point de vue pratique, il est exclu que l'Auteur ait utilisé des « règles » pouvant être traduites par les formules précitées. Par ailleurs, l'introduction du quantième 1/7 dans la division de 2 par 49 semble être un passage obligé. Toutefois, la *décomposition égyptienne simple* en trois quantièmes

$$\textbf{(A}_{49}\textbf{)}\quad \frac{2}{49}=\frac{1}{30}+\frac{1}{245}+\frac{1}{294}=\frac{1}{30}+\frac{1}{49\times 5}+\frac{1}{49\times 6}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30})+\frac{1}{5}+\frac{1}{6},$$

a 1/30 pour *quantième principal*. Nous retrouvons ce *quantième principal* en R2/45, R2/47, R2/53 et R2/55. Par conséquent, nous pouvons penser que si les scribes égyptiens avaient effectué quelques essais, la valeur de ce quantième aurait été prise en considération. Autrement dit, l'introduction du quantième 1/7 est sans doute un acte délibéré. Nous la trouvons seulement, pour les nombres premiers, en dehors de R2/49, en R2/43 et en R2/97. Dans le premier exercice, le *quantième principal* est égal à 1/42, ce qui peut surprendre car il existe plusieurs décompositions qui auraient pu être « retenues » par l'Auteur. Dans le second,

[3] Voir aussi l'annexe E 8 : décompositions relatives aux carrés de nombres impairs.

l'Auteur donne l'unique *décomposition égyptienne simple* en deux, trois ou quatre quantièmes, ce qui, théoriquement, rend obligatoire l'introduction du quantième 1/7. Ces deux exercices joints à ceux relatifs aux multiples de sept, ne nous permettent pas de préciser ce qu'il en est pour le nombre 49. Toutefois, il semble que l'Auteur ait utilisé au mieux, pour les nombres composés, la divisibilité par sept. Autant dire que, d'un point de vue heuristique, nous pouvons hésiter entre la reconnaissance de la divisibilité du nombre 49 par 7 qui peut conduire à **(DM7)**, et la consultation d'une table de nombres carrés à laquelle, ici, aujourd'hui, nous pouvons associer **(DPC)**. Nous penchons pour cette dernière possibilité qui présente l'avantage de conduire, naturellement, à l'introduction du multiplicateur 1/7.

Avec toutes les précautions d'usage, de la brève étude que nous venons de mener, il ressort que les expressions données par l'Auteur sont les « meilleures », tant pour leur obtention aisée que pour leur application lors de *doublements éventuels*.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, p. 3.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. III-IV.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, p. 259.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 55.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. III-IV, pl. 15.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 30.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 127-8, 333.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 40, pl. IV.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 145.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 63.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 104, 121.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 138, 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 102.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 43, pl. B.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{24}, p. 88.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 4.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 336.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363-364, 367, 381.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Van der Waerden, 1980, The (2: n) Table in the Rhind Papyrus, p. 266.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 123.