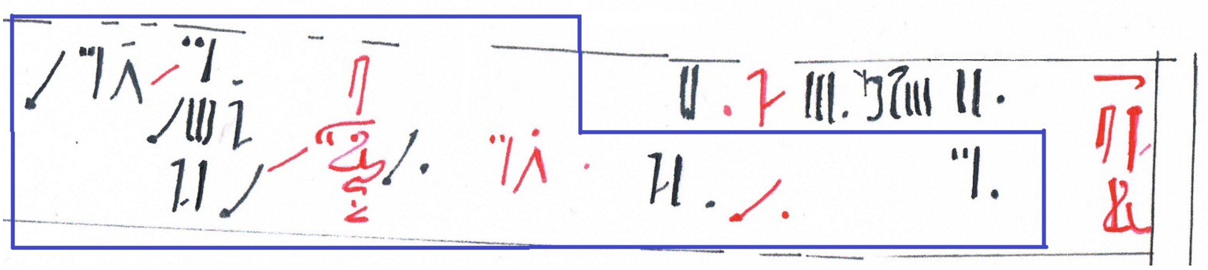
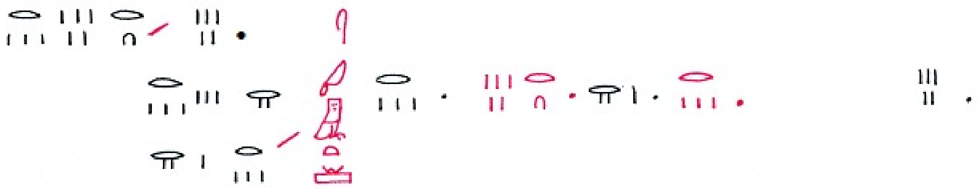
Expressions de 2 à partir de 5

TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE[1]



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE[2]

[1] On peut considérer que les exercices R2/3 et R2/5 sont imbriqués. Nous avons encadré en bleu ce qui, pour nous, et pour la plupart des commentateurs, relève de R2/5.

[2] Dans nos transcriptions hiéroglyphiques libres ainsi que dans nos adaptations, nous avons repris et mis entre crochets écrits en bleu, les propos qui figurent en haut de chaque page. Ici, c'est le cas pour l'énoncé de l'exercice.

TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L1 **s-** 1 5 **** 15’ 3’
L2 · 5 **· 3’** · 1 3” **· 15’** · 3’ **S-** 3” 3 3’
L3 **m.t** **** 3’ 1 3”

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L1 **sé-** 1 5 **** 15’ 3’
L2 · 5 **· 3’** · 1 3’’ **· 15’** · 3’ **ché-** 3’’ 3 3’
L3 **mèt** **** 3’ 1 3’’

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1[1]	**sé-**	1_1 5 ****[2, 3] 15' 3'
L_2 · 5 **· 3'** · 1 3''[4] **· 15'** · 3'	**ché-**	3'' 3 3'
L_3	**mèt$_1$**[5]	\\ 3' 1 3''

1 — En essayant de transcrire le plus fidèlement possible le texte hiératique, nous avons, comme ici, respecté l'écriture en diverses lignes ou colonnes, disposition que nous ne suivrons pas lors de notre traduction. En fait, le texte est écrit en quatre parties :
première partie écrite en ligne en dessous des nombres de R2/3 : 5 · 3' · 1 3'' · 15' · 3'
deuxième partie écrite en colonne à la fin de R2/3: *séchémèt* (sSm.t),
troisième partie écrite, à la suite, en « tableau »: 1 5

3'' 3 3'

\ 3' 1 3''

quatrième partie aussi à la suite en « tableau » : \ 15' 3'.

2 — Âhmès écrit son texte en quatre parties et sur trois lignes alors que ce calcul aurait pu être placé à la fin de la troisième ou dans une quatrième ligne. En fait, il a tracé des lignes de séparation pour toutes les *expressions de 2 à partir d'un entier* et la première « bande » est étroite. Toutefois ceci ne l'empêchera pas, lors de l'exercice R2/17 qui est dans la même bande, d'écrire sur quatre lignes. Les scribes compressent souvent leurs écrits ce qui, parfois, peut nuire à leur lisibilité. Ici, ce n'est pas le cas puisque le trait oblique de « sommation » a été tracé en rouge par Âhmès.

3 — Pour transcrire les traits obliques, nous avons adopté une représentation un peu semblable à celle suivie pour les points : nous avons conservé l'écriture normale pour ceux écrits en noir et utilisé le caractère gras pour ceux écrits en rouge**.** Notons qu'au début, à savoir, en R2/5, R2/7 et R2/9, Âhmès trace les tirets en rouge. Il veut ainsi, une fois pour toutes, en souligner leur importance. Ensuite, pour ces marques, il n'emploiera plus l'encre rouge revenant alors au noir habituel. Nous pouvons noter que cet exercice est parfait en ce qui concerne l'écriture des traits et des points.

4 — Transcrire est difficile. Peet est amené à critiquer sa propre transcription hiéroglyphique « *wrongly given as 1 1/3 in the plate* [3]».

5 — Le mot *séchémèt* (sSm.t) est écrit verticalement prenant ainsi position sur les trois lignes du texte. Dans notre glossaire, pour des cas semblables, nous indiquons seulement la première ligne où figure le début d'une expression.

[3] Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 38 ; pl. A.

TRADUCTION

//$_{2a}$		5	**3’**	1 3’’	**15’**	3’
//$_{1a}$	**Calcul**					
//$_{1b}$		1	5			
//$_{2b}$		3’’	3 3’			
//$_{3}$	\	3’	1 3’’			
//$_{1c}$	\	15’	3’			

ADAPTATION

[Exprime 2 à partir de 5**]** [1]

		5	**1/3**	1 2/3	**1/15**	1/3

Calcul

	1	5
	2/3	3 1/3
\	1/3	1 2/3
\	1/15	1/3

1 — Comme nous l’avons indiqué dans l’introduction, lors de nos adaptations, nous ajoutons la présentation générale qui figure en haut de chaque « page » des *expressions de deux à partir d’un entier*. Nous l’indiquons en la mettant entre crochets droits écrits en bleu.

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 5

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 5* sont :

(d_5) $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ et **(2_5)** $2=(1+\frac{2}{3})+\frac{1}{3}$

On « retrouve » la même « décomposition de 2/5 » dans le *Fragment UC 32159-f = K IV. 2* [4]*de El-Lahoun* et dans les textes attribués à Héron d'Alexandrie, savant grec qui vivait au début de notre ère[5]. L'Auteur l'utilise implicitement lors des exemples R30 et R56.

Pour exprimer un *doublement éventuel*, en utilisant **(d_{15})**, nous obtenons une décomposition en trois termes de 4/5 :

$$\frac{1}{5}\times 4=(\frac{1}{5}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{3}+\frac{1}{15})\otimes 2=(\frac{1}{3}\otimes 2)+(\frac{1}{15}\otimes 2)=\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\,.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 5

Le *quantième principal* est égal à 1/3. Il est *ternaire*. Par suite, théoriquement et pratiquement, pour parvenir aux expressions données par l'Auteur, nous sommes conduits à effectuer la division de 2 par 5 en chosissant tout d'abord le *multiplicateur deux-tiers* puis les *dédoublements successifs*. Implicitement, l'Auteur a utilisé la réduction « classique »

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\,.$$

Au texte de l'Auteur, nous avons donc rajouté cette opération dans la présentation que nous donnons ci-après :

1	5	(initialisation)
2/3	3 1/3	(« table de deux-tiers »)
1/3	1 1/2 1/6	(dédoublement)
\ 1/3	1 2/3	(réduction de 1/2 1/6 en 2/3)
Manque	1/3	**(2_5)**
\ 1/15	1/3	(inversion-multiplication)

Cette opération peut être généralisée et appliquée à ce que nous appelons les « multiples de cinq », c'est-à-dire aux nombres de la forme $5k$ où k est un nombre entier impair supérieur à 3 pour lesquels nous proposons de présenter la division de 2 par $5k$ comme suit :

[4] Nous donnons d'abord la nouvelle côte puis l'ancienne. Voir Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments, p. 93 ; http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk/lahun/ucarchivelahun/uc32159-f.jpg.

[5] Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 339. En 2014, Pabio Acerbi et Bernard Vitrac ont donné la première publication en français des *Métriques*.

1	$5k$	(initialisation)
1/5	k	(division par cinq)
$1/k$	5	(inversion)
2/3 de $1/k$	3 1/3	(« table de deux-tiers »)
1/3 de $1/k$	1 2/3	(dédoublement et réduction de 1/2 1/6 en 2/3)
\ $1/3k$	1 2/3	(multiplication-simplification)
Manque	1/3	**(2_5)**
\ $1/15k$	1/3	(inversion-multiplication)

Ceci conduit aux expressions suivantes :

$$\textbf{(d}_{5k}\textbf{)}\quad \frac{2}{5k}=\frac{1}{3k}+\frac{1}{15k}\qquad \text{avec}\qquad \textbf{(2}_5\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{2}{3})+\frac{1}{3}.$$

Nous parlons à ce propos d'une *décomposition de type « multiple de cinq »* mais nous verrons que, pour les multiples de cinq, l'Auteur donne souvent des expressions qui ne relèvent pas de cette forme[6].

VÉRIFICATION

La vérification est immédiate. Nous pouvons présenter et commenter la division de 5 par 3 comme suit :

\ 1	3	(initialisation)
\ 2/3	2	(« table de deux-tiers »)
Total	5	

OBTENTION DU MANQUE

L'expression du *manque* est immédiate puisque, pour obtenir l'unité, il suffit d'ajouter un-tiers à deux-tiers.

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/5

Le nombre 5 étant premier, il existe une seule *décomposition de 2/5 en deux quantièmes distincts*[7], la décomposition *primaire*[8] :

$$\textbf{(DP}_5\textbf{)}\quad \frac{2}{5}=\frac{2}{5+1}+\frac{2}{5\times(5+1)}=\frac{2}{6}+\frac{2}{5\times 6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5\times 3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}.$$

C'est celle que nous déduisons des expressions données par l'Auteur :

6 Voir l'annexe E 11 : décompositions relatives aux multiples impairs de cinq.
7 Voir l'annexe E 6 : décompositions théoriques en deux quantièmes distincts.
8 Voir aussi l'annexe E 7 : décompositions primaires.

(d₅) $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ avec **(2₅)** $2=(1+\frac{2}{3})+\frac{1}{3}$.

Il existe une seule *décomposition égyptienne simple* de 2/5 en trois quantièmes :

(A₅) $\frac{2}{5}=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ avec $2=(1+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

Il existe une seule autre *décomposition égyptienne* de 2/5 en trois quantièmes :

(B₅) $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$ avec $2=(1+\frac{2}{3})+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$.

Il n'existe pas de *décomposition égyptienne simple* de 2/5 en quatre quantièmes.

Le *quantième principal* de la *décomposition égyptienne simple* de 2/5 en trois quantièmes

(A₅) $\frac{2}{5}=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ avec $2=(1+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

étant égal à 1/4, nous pouvons parvenir à ce nombre en commençant la division de 2 par 5 à l'aide des *dédoublements successifs* :

1	5	(initialisation)
1/2	2 1/2	(dédoublement)
\ 1/4	1 1/4	(dédoublement)
Manque[9]	1/2 1/4	
\ 1/10	1/2	(inversion-multiplication)
\ 1/20	1/4	(inversion-multiplication)

Pour exprimer un *doublement*, nous pouvons écrire immédiatement :

$$\frac{1}{5}\times 4=(\frac{1}{5}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 2}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 5}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 10}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}.$$

La *décomposition égyptienne* de 2/5 en trois quantièmes[10]

(B₅) $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$ avec $2=(1+\frac{2}{3})+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$,

[9] Dans les diverses propositions de reconstructions des divisions afin d'obtenir des décompositions égyptiennes simples, le manque est connu d'après la connaissance des quantièmes non principaux puisque ces derniers sont égaux aux multiples du quantième considéré par un des quantièmes figurant dans le manque. Dès lors, nous devons trouver comme résultat correspondant au quantième principal, c'est-à-dire pour l'expression secondaire principale, une expression qui permette d'obtenir « facilement » le manque.

[10] Dans l'étude qu'il publie en 1981, Reducible and Trivial Decompositions Concerning Egyptian Arithmetics, Bruins l'oublie, voir p. 281. Elle est pourtant citée par Gillings (voir Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 54) dont il critique le travail. Rappelons que nous retenons seulement les décompositions qui nous semblent présenter un certain intérêt. En particulier, ces deux auteurs ne privilégient pas les décompositions que nous nommons *égyptiennes*.

n'est pas *simple* : les quantièmes figurant dans la *décomposition de deux* ne sont pas des multiples entiers du *quantième principal*. Elle revient à moins bien écrire le *manque*. Toutefois, lorsque l'on effectue un *doublement*, on retrouve le résultat obtenu à partir des expressions données par l'Auteur. En quelque sorte, ces remarques peuvent justifier le qualificatif « *simple* » que nous attribuons à certaines *décompositions égyptiennes*.

En résumé, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/5 :

	(d_5)	**(A_5)**	**(B_5)**
4/5	3	3	3

EN GUISE DE CONCLUSION

La partie « calcul » nous donne deux indications. La première est explicite : pour calculer le un-tiers d'un nombre entier, l'Auteur commence à calculer son deux-tiers, sans doute à partir d'une « table de deux-tiers » dont toutefois, nous n'avons pas de témoignage égyptien. Ensuite, il procède sans doute par dédoublement tout en utilisant, parfois, comme ici, la réduction de 1/2 1/6 en 2/3.

Nous avons vu qu'en dehors des expressions données par l'Auteur, nous pouvons seulement considérer la *décomposition égyptienne simple en trois quantièmes* :

$$\textbf{(A}_5\textbf{)} \quad \frac{2}{5}=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

En fait, nous sommes ici en présence de deux démarches élémentaires pour mener à bien les divisions de 2 par un entier : l'une en utilisant les *dédoublements successifs*, l'autre en choisissant, comme l'Auteur, les *multiplicateurs ternaires*, ici, 2/3 et 1/3. La première technique conduit ici à une décomposition en trois termes. Nous pourrions penser que la quantité de quantièmes a joué un rôle important pour retenir le deuxième procédé. Mais nous devons nous garder de toute conclusion trop hâtive. En effet, lors des décompositions relatives aux « multiples de cinq », l'Auteur utilise diverses méthodes qui, en particulier, pour le nombre 95, peuvent donner lieu à une décomposition en trois quantièmes. Il en est de même pour la « parité » des quantièmes figurant dans la décomposition de $2/n$. Il est clair que la division de 2 par un entier par la procédure des *dédoublements successifs* conduit à une expression de $2/n$ dont les quantièmes sont des inverses de nombres pairs. Ceci est utile lors d'un doublement mais peut être, comme ici, moins commode pour un autre doublement.

Avec toutes les précautions d'usage, il nous semble que les expressions données par l'Auteur sont les « meilleures » tant du point de vue de leur obtention que de leur application pour un *doublement éventuel*. D'entrée, l'Auteur souligne l'importance des *multiplicateurs ternaires* alors que nous pourrions penser à une utilisation importante de la procédure des *dédoublements successifs*, ce qui n'est pas le cas.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing $2/n$ into fractions, p. 3.
Bobynin, 1890, Sur le procédé employé dans le papyrus de Rhind, p. 111.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. I.

Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, pp. 449-450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 85, 87, 91.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, pp. 255-256, 258.
Bruins, 1981_2, Reducible and Trivial Decompositions Concerning Egyptian Arithmetics, p. 281.
Cantor, 1907, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, pp. 61-66.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 28, 82, 86-87.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. I, pl. 2.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 50.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 122, 326.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 36, pl. I.
Giacardi, Roero, 1979, *La matematica delle civiltà arcaiche, Egitto, Mesopotamia, Grecia*, pp. 77-78.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 132.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, pp. 53-54.
Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, pp. 293-294.
Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 204.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 105, 111.
Gunn, 1926_1, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 128.
Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments : UC 32114B, UC 32118B, UC 32134A+B, UC 32159-UC 32162, *in* Collier, Quirk, 2004, *The UCL Lahun Papyri*, pp. 92-93.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 136, 138, 140, 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp.99, 101.
Midonick, 1968, *The Treasury of Mathematics*, p. 85.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, pp. 38, 136 ; pl. A.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_2, 85.
Ritter, 2000, Egyptian mathematics *in* Selin, 2000, *Mathematics across cultures*, pp. 129-131.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 1-2.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, pp. 331, 336.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 362-363, 380, 382.
Van der Waerden, 1980, The (2: n) Table in the Rhind Papyrus, pp. 259, 264, 266, 270.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, pp. 24-25.
Vercoutter, 1957, Mathématiques et astronomie, pp. 26-27.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 116.
Vogel, 1929, Erweitert die Lederrolle unsere Kenntnis ägyptischer Mathematik ? p. 404.