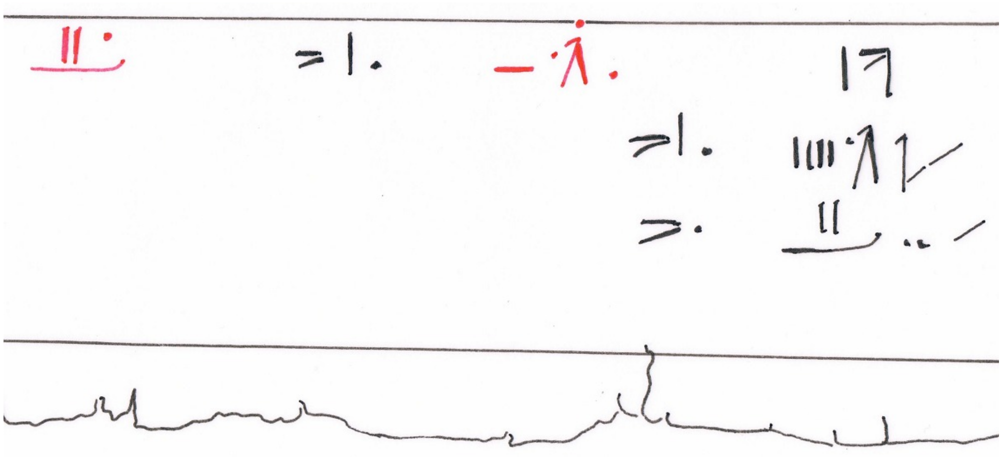
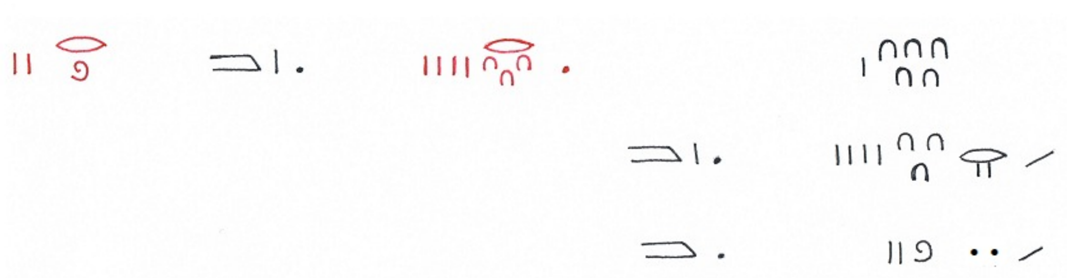
Expressions de 2 à partir de 51

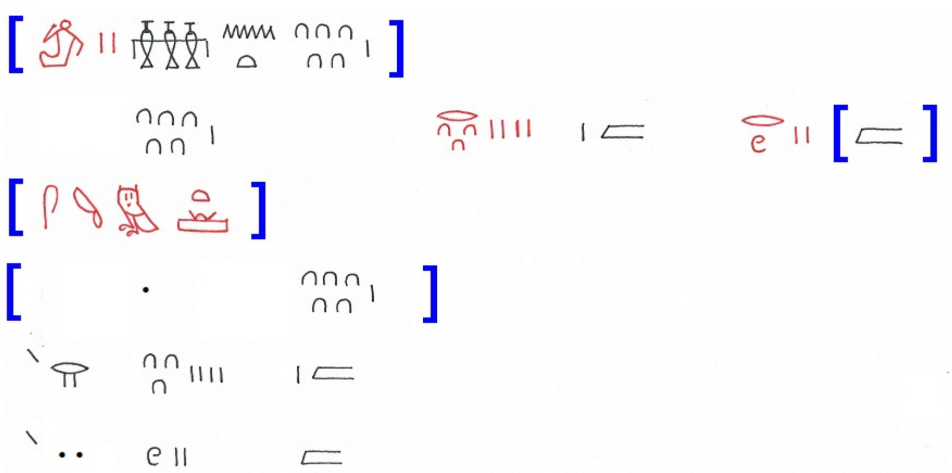
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1 *51* **· 34’** *· 1 2’* **102’**
L_2 *\ 3’’ 34 · 1 2’*
L_3 *\ 2 102 · 2’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1 *51* ***· 34’*** *· 1 2’* ***102’***
L_2 *\ 3’’ 34 · 1 2’*
L_3 *\ 2 102 2’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 51 **· 34’** · 1 2’ **102’**[1] [2]
L_2 \ 3’’ 34_2[3] · 1 2’
L_3 \ 2_1 102 · 2’

1 — Curieusement, l’auteur du *Fac-similé*[1] met deux points pour noter le centième ce qui conduit Chace[2] à écrire un point supplémentaire lors de sa transcription hiéroglyphique. Fort opportunément, Eisenlohr[3] a rectifié cette erreur qui n’a pas retenu l’attention de Griffith[4].

2 — L’absence du signe pour noter le demi est incompréhensible. Peet et W. Reineke marquent leur étonnement en mettant un sic !

3 — Âhmès écrit quatre barres verticales au lieu du trait horizontal classique d’où notre indexation 4_2.

[1] British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. IV.
[2] Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. IV,
[3] Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 41, pl. IV
[4] Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 207, pl. 2.

Traduction

//$_1$		51		**34’**	1 2’		**102’**	<2’>
//$_2$	\ 3’’	34	1 2’					
//$_3$	\ 2	102	2’					

ADAPTATION

[**Exprime 2** à partir de 51]

51	**1/34**	1 1/2	**1/102**	[1/2]

[**Calcul**]

	[1	51]
\ 2/3	1/34	1 1/2
\ 2	102	1/2

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 51

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 51* sont :

(d_{51}) $\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$ et **(2_{51})** $2 = (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$.

On retrouve la même expression dans les textes attribués à Héron d'Alexandrie, savant grec qui vivait au début de notre ère [5]. En fait, Paul Tannery la déduit de l'expression donnée pour 19/51.

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant **(2_{17})** et **(2_{51})**, nous obtenons des décompositions de 4/51 et de 8/51 qui sont ainsi respectivement en deux et trois quantièmes :

$$\frac{1}{51} \times 4 = (\frac{1}{51} \otimes 2) \otimes 2 = (\frac{1}{34} + \frac{1}{102}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 17} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 51} \otimes 2) = \frac{1}{17} + \frac{1}{51} \;;$$

$$\frac{1}{51} \times 8 = (\frac{1}{51} \times 4) \otimes 2 = (\frac{1}{17} + \frac{1}{51}) \otimes 2 = (\frac{1}{17} \otimes 2) + (\frac{1}{51} \otimes 2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68} + \frac{1}{34} + \frac{1}{102} =$$

$$= \frac{1}{12} + (\frac{1}{2 \times 17} + \frac{1}{3 \times 17} + \frac{1}{6 \times 17}) + \frac{1}{68} = \frac{1}{12} + \frac{1}{17} + \frac{1}{68}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 51

Les calculs écrits par Âhmès et la *décomposition de deux* **(2_{51})** montrent que les expressions données par l'Auteur peuvent être rangées dans le cadre général des *décompositions de type « multiple de trois »*. Nous proposons la division suivante :

1	51	(initialisation)
2/3	34	(« table de deux-tiers »)
\ 1/34	1 1/2	(inversion)
Manque	1/2	**(2_{51})**
\ 1/102	1/2	(inversion-multiplication)

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/51

Le nombre 51 étant le produit de deux nombres premiers distincts, à savoir 3 et 17, il existe deux autres *décompositions* de 2/51 en deux quantièmes différents supérieurs à 1/1000 :

(A_{51}) $\frac{2}{51} = \frac{1}{27} + \frac{1}{459}$ avec $2 = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}) + \frac{1}{9}$;

(B_{51}) $\frac{2}{51} = \frac{1}{30} + \frac{1}{170}$ avec $2 = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{30}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{10})$.

Il existe aussi trois *décompositions égyptiennes simples de 2/51* en trois quantièmes :

[5] Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 342.

(C_{51}) $\frac{2}{51}=\frac{1}{30}+\frac{1}{255}+\frac{1}{510}=\frac{1}{30}+\frac{1}{51\times 5}+\frac{1}{51\times 10}$ avec $2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{30})+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$;

(D_{51}) $\frac{2}{51}=\frac{1}{36}+\frac{1}{102}+\frac{1}{612}=\frac{1}{36}+\frac{1}{51\times 2}+\frac{1}{51\times 12}$ avec $2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12})+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$;

(E_{51}) $\frac{2}{51}=\frac{1}{36}+\frac{1}{153}+\frac{1}{204}=\frac{1}{36}+\frac{1}{51\times 3}+\frac{1}{51\times 4}$ avec $2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12})+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$.

La décomposition

(A_{51}) $\frac{2}{51}=\frac{1}{27}+\frac{1}{459}$ avec $2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18})+\frac{1}{9}$,

revient, théoriquement, à utiliser la *décomposition primaire* de 2/17

(DP_{17}) $\frac{2}{17}=\frac{2}{17+1}+\frac{2}{17\times(17+1)}=\frac{2}{18}+\frac{2}{306}=\frac{1}{9}+\frac{1}{153}$ avec $2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30})+\frac{1}{5}$,

décomposition différente de **(d_{17})**. En effet, d'après **(DP_{17})**, nous avons :

$$\frac{2}{51}=\frac{2}{17\times 3}=\frac{2}{17}\times\frac{1}{3}=(\frac{1}{9}+\frac{1}{153})\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9\times 3}+\frac{1}{153\times 3}=\frac{1}{27}+\frac{1}{459}.$$

Le *quantième principal* étant égal à 1/27, lors de la division de 2 par 51, nous pouvons obtenir la décomposition **(A_{51})** en utilisant plusieurs fois le multiplicateur deux-tiers ce qui est tout de même assez fastidieux. Quant aux *doublements éventuels*, en utilisant les « multiples de trois », nous pouvons écrire

$$\frac{1}{51}\times 4=(\frac{1}{51}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{27}+\frac{1}{459})\otimes 2=(\frac{1}{27}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 153}\otimes 2)=\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{306}+\frac{1}{918}=$$
$$=(\frac{1}{18}+\frac{1}{306})+(\frac{1}{54}+\frac{1}{918})=\frac{1}{17}+\frac{1}{51}.$$

Avec la simplification ci-dessus, nous retrouvons l'expression déduite de **(d_{51})**. Dans le cas contraire, nous avons,

$$\frac{1}{51}\times 8=(\frac{1}{51}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{306}+\frac{1}{918})\otimes 2=$$
$$=(\frac{1}{2\times 9}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 27}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 153}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 459}\otimes 2)=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{153}+\frac{1}{34}+\frac{1}{459}.$$

Nous obtenons alors des expressions plus complexes qu'avec les expressions données par l'Auteur. Tout ceci nous pousse à rejeter la décomposition **(A_{51})**.

La *décomposition* **(B_{51})** est *composée* :

(DC_{51}) $\frac{2}{51}=\frac{2}{3\times 17}=\frac{2}{3\times(3+17)}+\frac{2}{17\times(30+17)}=\frac{1}{30}+\frac{1}{170}$ avec $2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{30})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{10})$,

Le *quantième principal* étant égal à 1/30, nous pouvons utiliser les multiplicateurs décimaux pour mener à bien la division de 2 par 51. Mais ceci conduit naturellement à la décomposition égyptienne simple en trois quantièmes suivante :

(C_{51}) $\frac{2}{51}=\frac{1}{30}+\frac{1}{255}+\frac{1}{510}=\frac{1}{30}+\frac{1}{51\times 5}+\frac{1}{51\times 10}$ avec $2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{30})+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$.

Nous pouvons procéder comme suit :

	1	51	(initialisation)
	2/3	34	(« table de deux-tiers »)
	1/3	17	(dédoublement)
	1/10 de 1/3	2/3 1/30	(table de dixièmes)
\	1/30	2/3 1/30	(simplification)
	Manque	1/5 1/10	
\	1/255	1/5	(inversion-multiplication)
\	1/510	1/10	(inversion-multiplication)

Bien entendu, pour les deux expressions, les *doublements éventuels* sont immédiats. Donnons simplement ceux relatifs à la *décomposition composée*

$$\frac{1}{51}\times 4=(\frac{1}{51}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{30}+\frac{1}{170})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 15}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 85}\otimes 2)=\frac{1}{15}+\frac{1}{85},$$

$$\frac{1}{51}\times 8=(\frac{1}{51}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{15}+\frac{1}{85})\otimes 2=(\frac{1}{15}\otimes 2)+(\frac{1}{85}\otimes 2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{51}+\frac{1}{255}.$$

Nous obtenons, pour le dernier doublement une décomposition en quatre quantièmes.

Les *décompositions égyptiennes simples* en trois quantièmes

(D_{51}) $\frac{2}{51}=\frac{1}{36}+\frac{1}{102}+\frac{1}{612}=\frac{1}{36}+\frac{1}{51\times 2}+\frac{1}{51\times 12}$ avec $2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12})+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$,

(E_{51}) $\frac{2}{51}=\frac{1}{36}+\frac{1}{153}+\frac{1}{204}=\frac{1}{36}+\frac{1}{51\times 3}+\frac{1}{51\times 4}$ avec $2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12})+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$,

ont toutes les deux 1/36 comme *quantième principal* ce qui induit, lors la division de 2 par 51, par deux fois, l'introduction du multiplicateur deux-tiers, donc ces décompositions peuvent aussi être rejetées et ce d'autant plus que les expressions des *doublements éventuels* qui leur sont associées sont assez complexes.

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/51 et de 8/51 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

	(d_{51})	**(A_{51})**	**(B_{51})**	**(C_{51})**	**(D_{51})**	**(E_{51})**
4/51	2	<u>**2**</u>	2	?	?	?
8/51	<u>**3**</u>	<u>**3**</u>	4	?	?	?

EN GUISE DE CONCLUSION

L'Auteur a donné des *expressions de type « multiple de trois »*. Les autres décompositions que nous pouvons considérer n'apportent pas des simplifications notables.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 11.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. III-IV.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 55.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. IV, pl. 15.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 30.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 128, 333.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 41, pl. IV.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 145.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 63.
Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 207, pl. 2.
Gunn, 1926_1, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 137.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 102.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 43, pl. B.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{25}.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 4.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 335.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 123.