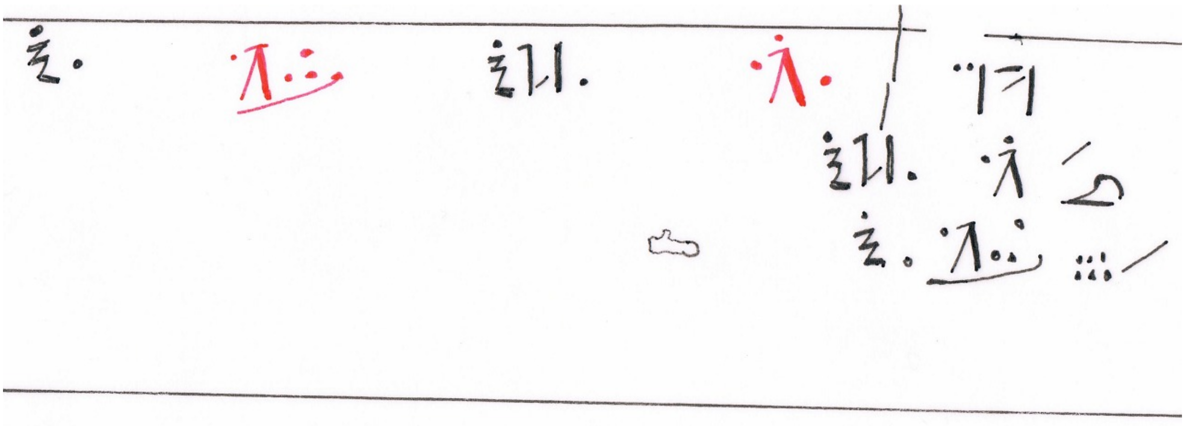
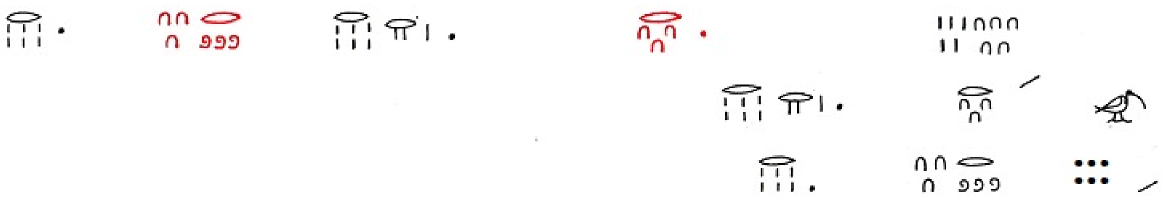
Expressions de 2 à partir de 55

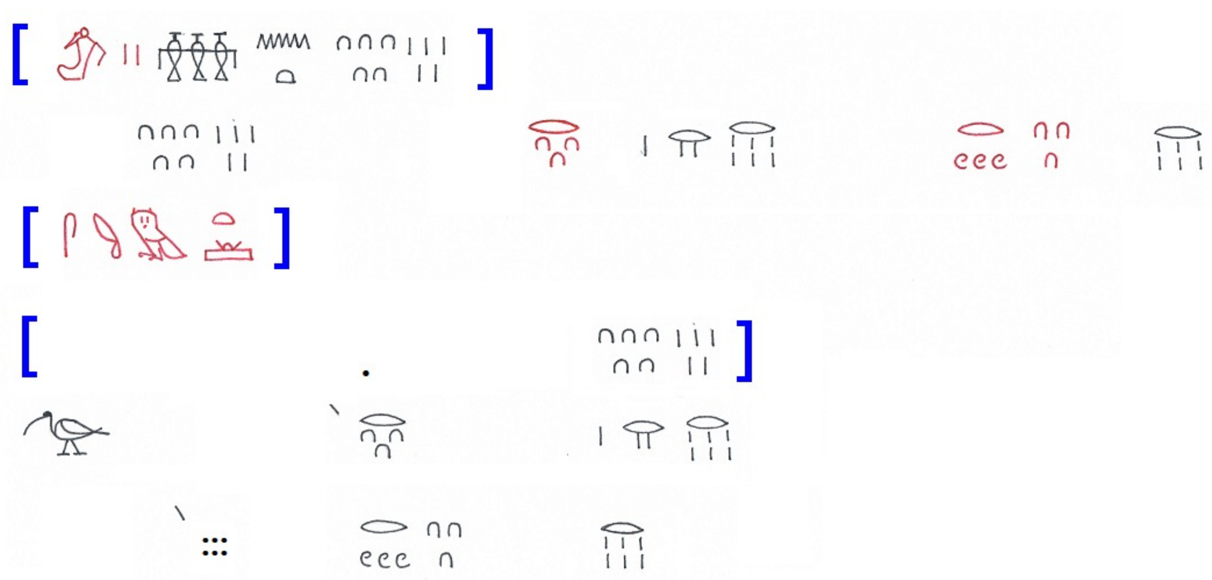
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1	*55 · **30’** · 1 3’’ 6’ **330’** · 6’*
L_2	*gm \ 30’ · 1 3’’ 6’*
L_3	*\ 6 330’ · 6’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1	*55 · **30’** · 1 3’’ 6’ **330’** · 6’*
L_2	*gèm \ 30’ · 1 3’’ 6’*
L_3	*\ 6 330’ · 6’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1	55 · **30’** · 1 3’’ 6_3’ **330’** · 6_3’
L_2	gèm$_1$ \ 30’ · 1 3’’ 6_3’
L_3	\ 6_1 330’ · 6_3’

Traduction

//$_1$		55	**30’**	1 3’’ 6’		**330’**	6’
//$_2$ Vérifie !	\	30’	1 3’’ 6’				
//$_3$	\ 6	330’	6’				

ADAPTATION

[**Exprime 2** à partir de 55]

	55	**1/30**	1 2/3 1/6	**1/330**	1/6

[**Calcul**]

		[1	55]
Vérifie !	\	1/30	1 2/3 1/6
	\ 6	1/330	1/6

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 55

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 55* sont :

$$\textbf{(d}_{55}\textbf{)} \quad \frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_{11}\textbf{)} \quad 2 = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}) + \frac{1}{6}.$$

La *décomposition de deux* montre que les expressions données par l'Auteur peuvent être rangées dans le cadre général des « multiples de onze ». Ceci est aussi confirmé par l'expression concernant le doublement du quantième 1/55. En effet, d'après **(d_{11})**, nous avons :

$$\frac{1}{55} \otimes 2 = \frac{2}{55} = \frac{2}{11 \times 5} = \frac{2}{11} \times \frac{1}{5} = (\frac{1}{6} + \frac{1}{66}) \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6 \times 5} + \frac{1}{66 \times 5} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}.$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant une *décomposition de type « multiple de trois »* et la réduction de 1/30 1/110 1/330 en 1/22 qui était sans doute inconnue des scribes égyptiens, nous obtenons des décompositions de 4/55 et de 8/55 qui sont alors en deux quantièmes :

$$\frac{1}{55} \times 4 = (\frac{1}{55} \otimes 2) \otimes 2 = (\frac{1}{30} + \frac{1}{330}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 15} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 165} \otimes 2) = \frac{1}{15} + \frac{1}{165},$$

$$\frac{1}{55} \times 8 = (\frac{1}{55} \times 4) \otimes 2 = (\frac{1}{15} + \frac{1}{165}) \otimes 2 = (\frac{1}{15} \otimes 2) + (\frac{1}{3 \times 55} \otimes 2) = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{110} + \frac{1}{330} =$$

$$= \frac{1}{10} + (\frac{1}{30} + \frac{1}{110} + \frac{1}{330}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{22}.$$

DIVISIONS COMMENTÉES DE 2 PAR 55

Si nous désirons nous placer dans le cadre des « multiples de onze », pour diviser 2 par 55, nous devons procéder comme suit :

	1	55	(initialisation)
	1/5	11	(division par cinq)
	2/3 de 1/5	7 1/3	(2/3 premier multiplicateur pour R2/11)
	1/3 de 1/5	3 2/3	(dédoublement et réduction de 1/2 1/6 en 2/3)
	1/15	3 2/3	(multiplication-simplification)
	1/30	1 1/2 1/3	(dédoublement)
\	1/30	1 2/3 1/6	(réduction de 1/2 1/3 en 2/3 1/6)
	Manque	1/6	**(2_{11})**
\	1/330	1/6	(inversion-multiplication)

Bien entendu, nous pouvons aussi suivre d'autres voies. Le *quantième principal* étant égal à 1/30, nous savons que les outils principaux pour diviser 2 par 55 sont alors le *multiplicateur* *deux-tiers* et la *division par dix*. L'ordre de l'introduction de ces deux opérateurs donne lieu à des procédures différentes. En commençant par la *division par dix*, nous avons :

1	55	(initialisation)
1/10	5 1/2	(division par dix)
2/3 de 1/10	3 2/3	(« table de deux-tiers »)
1/3 de 1/10	1 1/2 1/3	(dédoublement)
	1 2/3 1/6	(réduction de 1/2 1/3 en 2/3 1/6)
1/30	1 2/3 1/6	

Si, maintenant, nous commençons avec le *multiplicateur deux-tiers*, nous avons :

1	55	(initialisation)
2/3	36 2/3	(« table de deux-tiers »)
1/3	18 1/3	(dédoublement)
1/10 de 1/3	1 2/3 1/10 1/15	(division par dix)
1/30	1 2/3 1/6	(réductions)

VÉRIFICATION

Théoriquement, l'*expression secondaire principale* peut être considérée comme étant le résultat de la division de 55 par 30. Selon la procédure employée, elle peut donc avoir diverses formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* où les quantièmes de cette expression sont des multiples du *quantième principal*, nous pouvons distinguer les deux décompositions suivantes :

$$Q = \frac{55}{30} = 1 + \frac{25}{30} =$$

$$= 1 + \frac{20+5}{30} = 1 + \frac{20}{30} + \frac{5}{30} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \ ;$$

$$= 1 + \frac{15+10}{30} = 1 + \frac{15}{30} + \frac{10}{30} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

La première décomposition nous semble plus accessible car elle fait usage des seuls *multiplicateurs ternaires* :

\ 1	30	(initialisation)
\ 2/3	20	(« table de deux-tiers »)
1/3	10	(dédoublement)
\ 1/6	5	(dédoublement)
Total	55	

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/55

Le nombre 55 étant le produit des deux nombres premiers 5 et 11, il existe deux autres *décompositions de 2/55 en deux quantièmes distincts supérieurs à 1/1000 :*

$$(\mathbf{A_{55}})\quad \frac{2}{55}=\frac{1}{33}+\frac{1}{165}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{2}{3})+\frac{1}{3}\ ;$$

$$(\mathbf{B_{55}})\quad \frac{2}{55}=\frac{1}{40}+\frac{1}{88}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}).$$

Il existe deux *décompositions égyptiennes simples* en trois quantièmes :

$$(\mathbf{C_{55}})\quad \frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{550}+\frac{1}{825}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{6})+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\ ;$$

$$(\mathbf{D_{55}})\quad \frac{2}{55}=\frac{1}{40}+\frac{1}{110}+\frac{1}{440}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}.$$

Théoriquement, la décomposition

$$(\mathbf{A_{55}})\quad \frac{2}{55}=\frac{1}{33}+\frac{1}{165},$$

se déduit de la décomposition

$$(\mathbf{d_5})\quad \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},$$

qui résulte des expressions données par l'Auteur en R2/5. En effet, d'après **(d_5)**, nous pouvons écrire :

$$\frac{2}{55}=\frac{2}{5\times 11}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{11}=(\frac{1}{3}+\frac{1}{15})\times\frac{1}{11}=\frac{1}{3\times 11}+\frac{1}{15\times 11}=\frac{1}{33}+\frac{1}{165}.$$

Nous en déduisons la même *décomposition de deux*, à savoir,

$$(\mathbf{2_5})\quad 2=(1+\frac{2}{3})+\frac{1}{3},$$

et la procédure des « multiples de cinq » pour diviser 2 par 55 :

1	55	(initialisation)
1/5	11	(division par cinq)
1/11	5	(inversion)
2/3 de 1/11	3 1/3	(premier quantième pour R2/5)
1/3 de 1/11	1 2/3	(dédoublement)
\ 1/33	1 2/3	(dédoublement)
Manque	1/3	**(2_5)**
\ 1/165	1/3	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, nous pouvons écrire en utilisant les « multiples de trois » et la simplification de 1/66 1/330 en 1/55 que l'on peut déduire de la réduction de 1/6 1/30 en 1/5 :

$$\frac{1}{55}\times 4=(\frac{1}{55}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{33}+\frac{1}{165})\otimes 2=(\frac{1}{3\times 11}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 55}\otimes 2)=\frac{1}{22}+(\frac{1}{66}+\frac{1}{330})+\frac{1}{110}=$$

$$=\frac{1}{22}+\frac{1}{55}+\frac{1}{110}\ ;$$

$$\frac{1}{55}\times 8=(\frac{1}{55}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{22}+\frac{1}{55}+\frac{1}{110})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 11}\otimes 2)+(\frac{1}{55}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 55}\otimes 2)=$$

$$=\frac{1}{11}+\frac{1}{33}+\frac{1}{165}+\frac{1}{55}.$$

Tant pour la division que pour les *doublements éventuels*, cette décomposition est tout aussi complexe que celle donnée par l'Auteur.

La *décomposition composée*

(B$_{55}$) $\frac{2}{55}=\frac{2}{5\times 11}=\frac{2}{5\times(5+11)}+\frac{2}{11\times(5+11)}=\frac{1}{40}+\frac{1}{88}$ avec $2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{8})$,

présente plusieurs avantages. Tout d'abord, les deux vérifications qui sont associées à cette décomposition sont aisées à effectuer :

\	1	40	(initialisation)
	1/2	20	(dédoublement)
\	1/4	10	(dédoublement)
\	1/8	5	(dédoublement)
	Total	55	

et

	1	88	(initialisation)
\	1/2	44	(dédoublement)
	1/4	22	(dédoublement)
\	1/8	11	(dédoublement)
	Total	55	

$$55:40=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \quad \text{et} \quad 55:88=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}.$$

Ensuite, cette *décomposition composée* ne comporte que des inverses de multiples de 8 donc très utiles pour des *doublements* éventuels

$$\frac{1}{55}\times 4=(\frac{1}{55}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{40}+\frac{1}{88})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 20}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 44}\otimes 2)=\frac{1}{20}+\frac{1}{44},$$

$$\frac{1}{55}\times 8=(\frac{1}{55}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{20}+\frac{1}{44})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 10}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 22}\otimes 2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{22}.$$

Nous avons, pour ces deux doublements des expressions en deux quantièmes qui sont plus « élémentaires » que celles que nous avons déduites à partir des dires de l'Auteur.

Enfin la *décomposition de deux* associée est aussi élémentaire puisqu'il s'agit de

$$2 = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{8}).$$

Raisonnant à partir de cette décomposition, nous pouvons écrire, aujourd'hui,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{11}{8} \quad , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \quad , \quad 2 = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{8}) = \frac{11}{8} + \frac{5}{8} \quad , \quad \frac{2}{5 \times 11} = \frac{1}{8 \times 5} + \frac{1}{8 \times 11},$$

La *décomposition égyptienne simple* de 2/55 en trois quantièmes :

$$\textbf{(C}_{\mathbf{55}}\textbf{)} \quad \frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{550} + \frac{1}{825} \qquad \text{avec} \qquad 2 = (1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}) + \frac{1}{10} + \frac{1}{15},$$

a le même *quantième principal* que celui donné par l'Auteur. Nous pouvons considérer que cette décomposition revient à moins bien écrire le *manque* car son doublement exige une simplification pour aboutir au même résultat qu'avec la décomposition que nous déduisons des expressions données par l'Auteur :

$$\frac{1}{55} \times 4 = (\frac{1}{55} \otimes 2) \otimes 2 = (\frac{1}{30} + \frac{1}{550} + \frac{1}{825}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 15} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 225} \otimes 2 + \frac{1}{3 \times 275}) =$$
$$= \frac{1}{15} + (\frac{1}{225} + \frac{1}{550} + \frac{1}{1650}) = \frac{1}{15} + \frac{1}{165}.$$

La *décomposition égyptienne simple* de 2/55 en trois quantièmes

$$\textbf{(D}_{\mathbf{55}}\textbf{)} \quad \frac{2}{77} = \frac{1}{40} + \frac{1}{110} + \frac{1}{440} \qquad \text{avec} \qquad 2 = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{8},$$

a le même *quantième principal* que la *décomposition composée* **($\mathbf{B_{55}}$)**. Pour l'obtenir, il nous suffit de procéder comme suit :

1	55	(initialisation)
1/10	5 1/2	(*table de dixièmes*)
1/20	2 1/2 1/4	(dédoublement)
\ 1/40	1 1/4 1/8	(dédoublement)
Manque	1/2 1/8	
\ 1/110	1/2	(inversion-multiplication)
\ 1/440	1/8	(inversion-multiplication)

Autrement dit, en nous situant dans le domaine strictement opératoire, cette décomposition pourrait être retenue. Quant aux *doublements éventuels*, nous avons, sans utiliser les simplifications ci-dessus :

$$\frac{1}{55} \times 4 = (\frac{1}{55} \times 2) \otimes 2 = (\frac{1}{40} + \frac{1}{110} + \frac{1}{440}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 20} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 55} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 220} \otimes 2) =$$
$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{55} + \frac{1}{220}.$$

$$\frac{1}{55} \times 8 = (\frac{1}{55} \times 4) \otimes 2 = (\frac{1}{20} + \frac{1}{55} + \frac{1}{220}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 10} \otimes 2) + (\frac{1}{55} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 110} \otimes 2) =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{40} + \frac{1}{110} + \frac{1}{440} + \frac{1}{110} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \frac{1}{440}.$$

Les expressions ainsi obtenues sont assez complexes.

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/55 et de 8/55 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

	(d_{55})	**(A_{55})**	**(B_{55})**	**(C_{55})**	**(D_{55})**
4/55	2	3	2	4 **2**	3
8/55	4 **2**	4	2	4 **2**	4

EN GUISE DE CONCLUSION

Il semble que, pour l'Auteur, le caractère opératoire ait prévalu aux dépens des *doublements éventuels*. La *décomposition de deux* et la procédure que nous pouvons utiliser pour diviser 2 par 55 peuvent souligner l'insertion des expressions données par l'Auteur dans le domaine des « multiples de onze ». C'est peut-être un des moteurs de leur obtention, chemin vers la décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs entiers. Mais nous savons que, par ailleurs, l'Auteur n'a pas toujours procédé de la sorte et que, par exemple, ici, la *décomposition composée*

$$\textbf{(DC}_{55}\textbf{)} \quad \frac{2}{55} = \frac{2}{5\times 11} = \frac{2}{5\times(5+11)} + \frac{2}{11\times(5+11)} = \frac{1}{40} + \frac{1}{88},$$

est plus commode tant pour son obtention que pour exprimer les *doublements éventuels*. Pour toutes ces raisons, nous pouvons penser que la *décomposition composée* est « meilleure » que celle donnée par l'Auteur et, par suite, nous sommes amenés à nous interroger. Tout d'abord, quelle connaissance l'Auteur pouvait-il avoir de l'obtention des *décompositions composées* ? Dans les *expressions de deux à partir d'un entier*, nous pouvons seulement parler d'une règle générale pour les « multiples de trois ». Celle-ci se situe dans le cadre de la division *via* l'introduction du multiplicateur deux-tiers. Ici, la technique prend la forme d'une expression générale et elle est donc de nature différente. Ensuite, l'*expression secondaire* relative au second multiplicateur, se compose de deux quantièmes binaires et ne comporte pas, comme en R2/35 et en R2/91, deux-tiers. Par ailleurs, en effectuant une division assez élémentaire nous obtenons la *décomposition égyptienne simple* en trois quantièmes suivante :

$$\textbf{(D}_{55}\textbf{)} \quad \frac{2}{55} = \frac{1}{40} + \frac{1}{110} + \frac{1}{440} \qquad \text{avec} \qquad 2 = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Enfin, nous pouvons nous interroger sur la pertinence du « choix » du « multiple de onze » aux dépens du « multiple de cinq » qui donne lieu aux expressions suivantes :

$$\textbf{(A}_{55}\textbf{)} \quad \frac{2}{55} = \frac{1}{33} + \frac{1}{165} \qquad \text{avec} \qquad 2 = (1 + \frac{2}{3}) + \frac{1}{3}.$$

Elles nous semblent plus commodes pour l'obtention des expressions correspondantes ainsi que celles des *doublements éventuels*. De plus, son dernier quantième est plus grand, mais tous ses quantièmes sont impairs. Comme toujours, selon que l'on mette en avant telle ou telle propriété, l'opinion que l'on peut avoir sur la « qualité » des expressions données par l'Auteur est variable.

Enfin, d'un point de vue théorique, nous pouvons envisager la décomposition **(d_{55})** de diverses manières. Certes nous nous sommes placés dans un cadre particulier où le facteur 11 du nombre 55 joue un rôle particulier. Mais nous pouvons considérer que nous utilisons la décomposition **(d_{11})** soit sous sa forme théorique primaire, auquel cas nous nous pouvons parler de *décomposition de type « primaire multiple de cinq »*, à savoir,

$$\textbf{(DPM5)} \quad \frac{2}{5p} = \frac{2}{5\times(p+1)} + \frac{2}{5p\times(p+1)} = \frac{2}{5\times 11} = \frac{2}{5\times(11+1)} + \frac{2}{55\times(11+1)} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330},$$

soit sous la forme déduite des propos de l'Auteur, auquel cas nous parlons d'une *décomposition de type « facteur distinct de cinq »*, à savoir,

$$\textbf{(DFD5)} \quad \frac{2}{5p} = \frac{2}{p}\times\frac{1}{5} = \frac{2}{11}\times\frac{1}{5} = (\frac{1}{6}+\frac{1}{66})\times\frac{1}{5} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}.$$

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 5, 11-12.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. IV-V.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, p. 89.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, p. 259.
Bruins, 1975_1, The Part in Ancient Egyptian Mathematics, p. 250.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 56.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. V, pl. 16.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 31.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 128, 333.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 41, pl. V.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 146.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 63.
Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 294.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 104, 121, 127-128.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 102.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 44, pl. B.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{27}, p. 88.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 5.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 336.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363, 373, 377, 381-382.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Van der Waerden, 1980, The (2: n) Table in the Rhind Papyrus, p. 266.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 124.