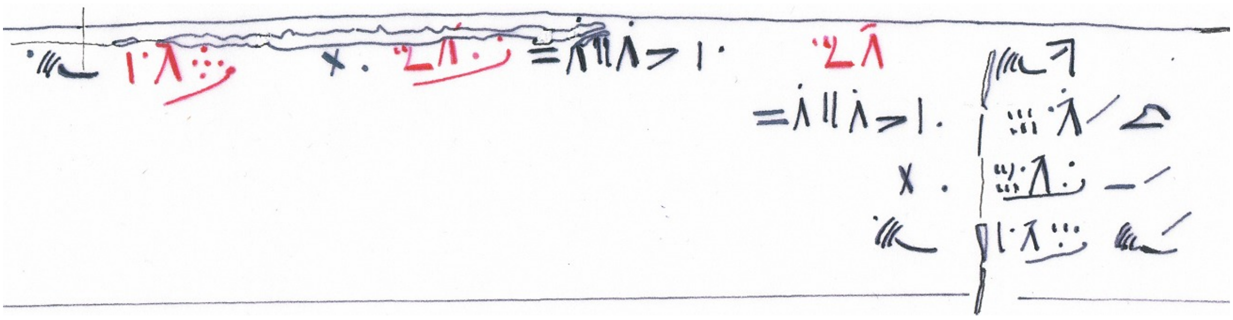
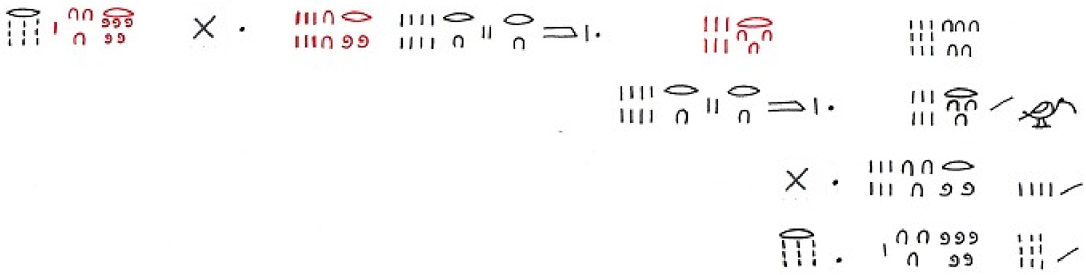
Expressions de 2 à partir de 59

Une brisure horizontale semble peu affecter le haut de nombreux signes de la première ligne. Griffith le souligne ainsi : « *there is a split along the upper edge, injuring the signs* [1]».

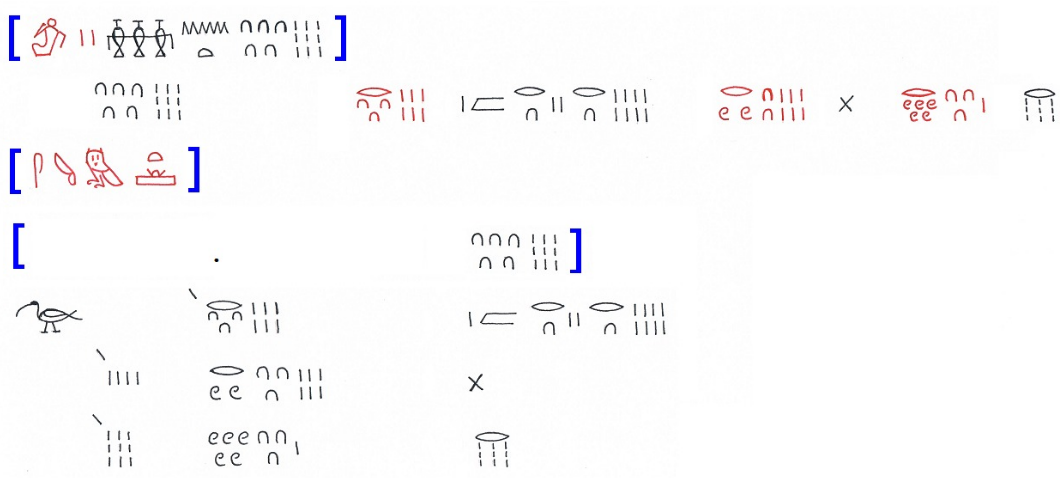
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



[1] Griffith, 1894, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 207.

TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1 *59 **36’** · 1 2’ 12’ 18’ **236’** · 4’ **531’** 9’*

L_2 *gm \ 36’ · 1 2’ 12’ 18’*

L_3 *\ 4 236’ · 4’*

L_4 *\ 9 531 · 9’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1 *59 **36’** · 1 2’ 12’ 18’ **236’** · 4’ **531’** 9’*

L_2 *gèm \ 36’ · 1 2’ 12’ 18’*

L_3 *\ 4 236’ · 4’*

L_4 *\ 9 531 · 9’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 59 **36_2’** · 1 2’ 12’ 18’ **236_2’**[1] · 4’ **531’**[1] 9’

L_2 gèm_1 \ 36_1’ · 1 2’ 12’ 18’

L_3 \ 4 236_1’[2] · 4’

L_4 \ 9 531 · 9’

1 — Nous avons suivi les divers traducteurs en considérant que, dans la première ligne, Âhmès avait mis les points indiquant les quantièmes 1/236 et 1/531. En fait, à cet endroit, le papyrus est abîmé et il est difficile de lire la présence ou l’absence des points. Voir l’introduction à cet exercice.

2 — Bien qu’il y ait une petite barre, l’allure générale est celle des points.

Traduction

//1	59		**36’**	1 2’ 12’ 18’	**236’**	4’		**531’**	9’
//2 Vérifie !	\	36’	1 2’ 12’ 18’						
//3	\ 4	236’	4’						
//4	\ 9	531	9’						

ADAPTATION

[**Exprime 2** à partir de 59]

	59	**1/36**	1 1/2 1/12 1/18	**1/236**	1/4	**1/531**	1/9

[**Calcul**]

		[1	59]
Vérifie !	\	1/36	1 1/2 1/12 1/18
	\ 4	1/236	1/4
	\ 9	531	1/9

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 59

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 59* sont :

$$\boxed{\textbf{(d}_{59}\textbf{)}\quad \frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_{59}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18})+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}.}$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant une *décomposition de type « multiple de trois »*, nous obtenons des expressions qui sont en quatre termes dont l'un, à savoir, 1/1062, est un peu petit :

$$\frac{1}{59}\times 4=(\frac{1}{89}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 18}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 118}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 177}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{118}+\frac{1}{354}+\frac{1}{1062}\ ;$$

$$\frac{1}{59}\times 8=(\frac{1}{59}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{18}+\frac{1}{118}+\frac{1}{354}+\frac{1}{1062})\otimes 2=$$
$$=(\frac{1}{2\times 9}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 59}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 177}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 531}\otimes 2)=\frac{1}{9}+\frac{1}{59}+\frac{1}{177}+\frac{1}{531}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 59

Lorsque l'on veut parvenir aux expressions données par l'Auteur en effectuant la division de 2 par 59, plusieurs difficultés se présentent. Elles sont liées à l'obtention du *quantième principal* à savoir, 1/36, et de l'*expression secondaire* qui lui est associée et enfin au *manque*. Tout d'abord, puisque le nombre 36 est le produit de 4 par 9, nous devons effectuer, pour le nombre 4, deux *dédoublements* puis, pour le nombre 9, deux passages par deux-tiers suivis, à chaque fois, par un *dédoublement*. L'ordre de ces opérations est important. Par exemple, en commençant par le deux-tiers suivi du tiers, nous pouvons obtenir un résultat différent, à savoir, 1 1/2 1/8 1/72, de celui donné par l'Auteur, c'est-à-dire, 1 1/2 1/12 1/18 :

1	59	(initialisation)
2/3	39 1/3	(« table de deux-tiers »)
1/3	19 2/3	(dédoublement et réduction de 1/2 1/6 en 2/3)
2/3 de 1/3	13 1/9	(« table de deux-tiers » et simplification)
1/3 de 1/3	6 1/2 1/18	(dédoublement)
1/9	6 1/2 1/18	(multiplication-simplification)
1/18	3 1/4 1/36	(dédoublement)
\ 1/36	1 1/2 1/8 1/72	(dédoublement)

Autrement dit, la voie qui paraissait la plus naturelle doit être rejetée. Notons qu'elle conduit à une *décomposition égyptienne* qui n'est pas *simple*.

Dès lors, nous devons emprunter d'autres chemins et commencer, par exemple par les *dédoublements*. Ceci revient à procéder comme suit :

	1	59	(initialisation)
	1/2	29 1/2	(dédoublement)
	1/4	14 1/2 1/4	(dédoublement)
	2/3 de 1/4	9 2/3 1/6	(« table de deux-tiers » et simplification)
	1/3 de 1/4	4 2/3 1/4	(dédoublement et simplification)
	1/12	4 2/3 1/4	(multiplication-simplification)
	2/3 de 1/12	3 1/6 1/9	(« table de deux-tiers »)
	1/3 de 1/12	1 1/2 1/12 1/18	(dédoublement)
\	1/36	1 1/2 1/12 1/18	(multiplication-simplification)

Cette fois, la procédure est moins naturelle et nous devons utiliser quelques simplifications.

Parmi les autres voies, nous pouvons situer les *dédoublements* entre les introductions des deux-tiers. Nous proposons de les placer l'un à la suite de l'autre. Cette manière de procéder présente l'avantage de rendre un peu plus naturelle l'introduction du deuxième deux-tiers. En effet, d'une part, le tiers de 4 1/2 1/4 1/6 conduit à un nombre compris entre 1 et 2 donc satisfaisant à certains critères opératoires et, d'autre part, la poursuite des *multiplicateurs ternaires* n'aboutit pas (il n'existe pas de *décomposition égyptienne simple* ayant un *quantième principal ternaire*) :

	1	59	(initialisation)
	2/3	39 1/3	(« table de deux-tiers »)
	1/3	19 2/3	(dédoublement et réduction de 1/2 1/6 en 2/3)
	1/6	9 1/2 1/3	(dédoublement)
	1/12	4 1/2 1/4 1/6	(dédoublement)
	2/3 de 1/12	3 1/6 1/9	(« table de deux-tiers » et simplification)
	1/3 de 1/12	1 1/2 1/12 1/18	(dédoublement)
\	1/36	1 1/2 1/12 1/18	(multiplication-simplification)
Manque		1/4 1/9	
\	1/236	1/4	(inversion-multiplication)
\	1/531	1/9	(inversion-multiplication)

Notons que nous pouvons aussi écrire (ce qui donne la même expression finale) :

$$59\times\frac{1}{6}=9+\frac{2}{3}+\frac{1}{6} \quad \text{d'où} \quad 59\times\frac{1}{12}=4+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=4+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=4+\frac{2}{3}+\frac{1}{4},$$

$$(59\times\frac{1}{12})\times\frac{2}{3}=2+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=2+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=2+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=3+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}.$$

VÉRIFICATION

Théoriquement, l'*expression secondaire principale* peut être considérée comme étant le résultat de la division de 59 par 36. Selon la procédure employée, elle peut donc avoir diverses formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* où les quantièmes de cette expression sont des multiples du *quantième principal*, nous pouvons distinguer les deux décompositions « utiles » suivantes :

$$Q = \frac{59}{36} = 1 + \frac{23}{36} = 1 + \frac{18+3+2}{36} = 1 + \frac{18}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} \;;$$

$$Q = \frac{59}{36} = 1 + \frac{23}{36} = 1 + \frac{12+9+2}{36} = 1 + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} + \frac{2}{36} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{18}\,.$$

La première décomposition correspond à l'*expression secondaire* que nous déduisons des propos de l'Auteur. Mais, la vérification peut paraître assez compliquée car elle fait intervenir, à la fois, les deux multiplicateurs les plus classiques, à savoir, le demi et le deux-tiers. Autrement dit, comme pour la division de 2 par 59, diverses possibilités sont offertes. Nous pouvons tout d'abord examiner la procédure des *dédoublements successifs*. Elle pourrait se présenter comme suit :

\ 1	36	(initialisation)
\ 1/2	18	(dédoublement)
1/4	9	(dédoublement)
\ 1/8	4 1/2	(dédoublement)
Manque	1/2	
\ 1/72	1/2	(inversion-multiplication)

Le résultat ainsi obtenu, à savoir, 1 1/2 1/8 1/72, est difficile à utiliser pour parvenir au manque de la division indiqué précédemment, c'est-à-dire, 1/4 1/9, sauf à connaître la relation

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72}\,,$$

égalité que nous n'avons pas rencontrée dans les documents égyptiens qui nous sont parvenus, mais qui est d'une forme assez classique :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

Compte-tenu du dividende particulier, nous pouvons alors commencer par deux-tiers et procéder comme suit :

\ 1	36	(initialisation)
2/3	24	(« table de deux-tiers »)
\ 1/3	12	(dédoublement)
\ 1/6	6	(dédoublement)
\ 1/12	3	(dédoublement)
Manque	2	
1/36	1	(inversion de l'initialisation)
\ 1/18	2	(doublement)
Total	59	

Pour parvenir à l'expression donnée par l'Auteur, il suffit de remplacer 1/3 1/6 par 1/2. Autrement dit, ce qui paraissait être une source de difficulté, disparaît avec cette simplification.

OBTENTION DU MANQUE

D'un point de vue théorique, il existe plusieurs expressions du *manque* en deux ou trois quantièmes distincts :

$$M = 2 - 59 \times \frac{1}{36} = 2 - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18}) == 2 - \frac{59}{36} = \frac{72-59}{36} = \frac{13}{36} =$$

$$= \frac{12+1}{36} = \frac{12}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36} \ ;$$

$$= \frac{9+4}{36} = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \ ;$$

$$= \frac{9+3+1}{36} = \frac{9}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} \ ;$$

$$= \frac{6+4+3}{36} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} .$$

Deux comportent le quantième 1/36 qui donne lieu à un quantième très petit pour l'expression de 2/59 : 1/2124. Les expressions des deux autres sont respectivement en deux et trois quantièmes. On peut considérer qu'il faut retenir celle en deux quantièmes en excluant l'autre sous le prétexte que l'on aurait mal exprimé le *manque*, car 1/6 1/12 est égal à 1/4.

Pour revenir aux propos de l'Auteur, si nous voulons procéder par soustraction et utiliser le *procédé des auxiliaires numériques*, nous pouvons choisir le nombre 36 pour *référent commun* et diviser alors 13 par 36. Pour parvenir à l'expression donnée par l'Auteur, il suffit de commencer par des *dédoublements* :

1	36	(initialisation)
1/2	18	(dédoublement)
\ 1/4	9	(dédoublement)
\ 1/9	1	(inversion)

Si, maintenant, nous voulons utiliser diverses relations, nous pouvons procéder comme suit. Le dernier quantième, 1/18, figure dans une seule réduction :

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}.$$

Par suite, on ajoute 1/9 qui est ainsi un élément du *manque partiel*, d'où :

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18})+\frac{1}{9}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+(\frac{1}{9}+\frac{1}{18})=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{12})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},$$

car

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}.$$

Il manque encore 1/4, d'où le *manque* total : 1/4 1/9.

Bien entendu, en procédant différemment, nous pouvons obtenir l'expression du *manque* en trois quantièmes. Il suffit d'ajouter comme précédemment 1/9, puis 1/12 et enfin 1/6 :

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18})+\frac{1}{9}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+(\frac{1}{9}+\frac{1}{18})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12},$$

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12})+\frac{1}{12}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+(\frac{1}{12}+\frac{1}{12})=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{6})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},$$

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+\frac{1}{6}=1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=1+1=2.$$

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/59

Le nombre 59 étant premier, il existe une seule *décomposition de 2/59 en deux quantièmes distincts* :

$$\textbf{(A}_{59}\textbf{)}\quad \frac{2}{59}=\frac{1}{30}+\frac{1}{1770}\qquad \text{avec}\qquad 2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10})+\frac{1}{30}.$$

Il n'existe pas d'autre *décomposition égyptienne simple* de 2/59 en trois quantièmes.

Il existe une seule *décomposition égyptienne simple* de 2/59 en quatre quantièmes :

$$\textbf{(B}_{59}\textbf{)}\quad \frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{354}+\frac{1}{531}+\frac{1}{708}\qquad \text{avec}\qquad 2+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36})+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}.$$

La *décomposition primaire*

$$\textbf{(A}_{59}\textbf{)}\quad \frac{2}{59}=\frac{2}{59+1}+\frac{2}{59\times(59+1)}=\frac{2}{60}+\frac{2}{59\times 60}=\frac{1}{30}+\frac{1}{59\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{1770}$$

$$\text{avec}\qquad 2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10})+\frac{1}{30},$$

aurait pu avoir la faveur des scribes. Nous pouvons parvenir à ces expressions en commençant la division de 2 par 59 comme suit :

1	59	(initialisation)
2/3	39 1/3	(« table de deux-tiers »)
1/3	19 2/3	(dédoublement et réduction de 1/2 1/6 en 2/3)
1/10 de 1/3	1 2/3 1/5 1/30 1/15	(division par dix)
\ 1/30	1 2/3 1/5 1/10	(simplification)

Quant au *manque*, en ajoutant 1/30, nous obtenons immédiatement :

$$(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10})+\frac{1}{30}=1+\frac{2}{3}+(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30})=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=2\,.$$

Pour les *doublements éventuels*, si nous passons outre à une limitation de taille, en utilisant les « multiples de trois », nous obtenons des expressions de 4/59 et de 8/59, respectivement, en deux et quatre termes :

$$\frac{1}{59}\times 4=(\frac{1}{59}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{30}+\frac{1}{1770})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 15}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 885}\otimes 2)=\frac{1}{15}+\frac{1}{885}\;;$$

$$\frac{1}{59}\times 8=(\frac{1}{59}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{15}+\frac{1}{885})\otimes 2=(\frac{1}{15}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 295}\otimes 2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{590}+\frac{1}{1770}\,.$$

Comme nous l'avons déjà dit, le *quantième principal* de la *décomposition égyptienne de 2/59 en quatre quantièmes*,

$$\textbf{(B}_{59}\textbf{)}\quad \frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{354}+\frac{1}{531}+\frac{1}{708}\quad\text{avec}\quad 2+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36})+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12},$$

est le même que celui que l'on déduit des expressions données par l'Auteur. Nous pouvons dire que cette décomposition revient, en quelque sorte à moins bien écrire le *manque* et par suite qu'elle est sans intérêt. Ceci est conforté par l'expression du quadruple du quantième 1/59 qui est identique à celle que nous avons précédemment obtenue :

$$\frac{1}{59}\times 4=(\frac{1}{59}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{36}+\frac{1}{354}+\frac{1}{531}+\frac{1}{708})\otimes 2=$$
$$=(\frac{1}{2\times 18}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 177}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 177}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 354}\otimes 2)=$$
$$\frac{1}{18}+\frac{1}{177}+(\frac{1}{354}+\frac{1}{354})+\frac{1}{1062}==\frac{1}{18}+(\frac{1}{177}+\frac{1}{177})+\frac{1}{1062}=\frac{1}{18}+\frac{1}{118}+\frac{1}{354}+\frac{1}{1062}\,.$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/59 et de 8/59 (rappelons que nous mettons en rouge les décompositions comportant des quantièmes plus petits que 1/1000) :

	(d_{59})	**(A_{59})**	**(B_{59})**

4/59	4	2	4
8/59	4	4	4

EN GUISE DE CONCLUSION

Nous pouvons placer l'exercice R2/59 dans le cadre de l'unicité : unicité des *décompositions égyptiennes simples* en trois ou quatre quantièmes, unicité de la valeur du *quantième principal*, à savoir, 1/36, pour les expressions données par l'Auteur relatives à des nombres premiers, et enfin unicité de la place du quantième 1/9 dans une *décomposition de deux*. En quelque sorte, si nous mettons à part la *décomposition primaire* de 2/59 dont le deuxième quantième est très petit, l'Auteur ne pouvait que donner les expressions que nous lisons sous le calame d'Âhmès. Ceci n'enlève rien aux efforts qu'ont dû déployer les savants égyptiens pour parvenir à un tel résultat. Les commentaires que nous avons donnés lors de l'examen de certaines procédures qui peuvent être utilisées pour diviser 2 par 59 en sont une illustration.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 14.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. IV-V.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 85-87, 91.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, pp. 257-258.
Bruins, 1975_1, The Part in Ancient Egyptian Mathematics, p. 248.
Bruins, 1981_2, Reducible and Trivial Decompositions Concerning Egyptian Arithmetics, p. 291.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 31.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. IV, pl. 17.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 56.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 128-9, 334.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 41, pl. V.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 147.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 64.
Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, pp. 295, 298.
Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 207.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 105.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 140, 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 104.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 44, pl. C.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{29}, p. 88.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 5.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, pp. 331, 334.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363, 372, 374, 376, 382.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 124.