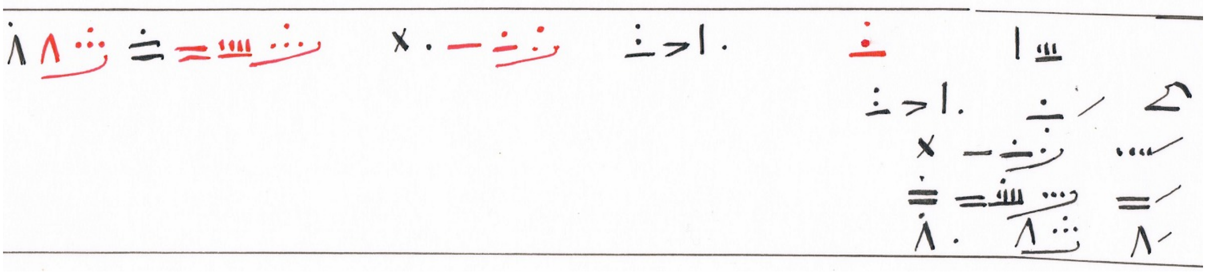
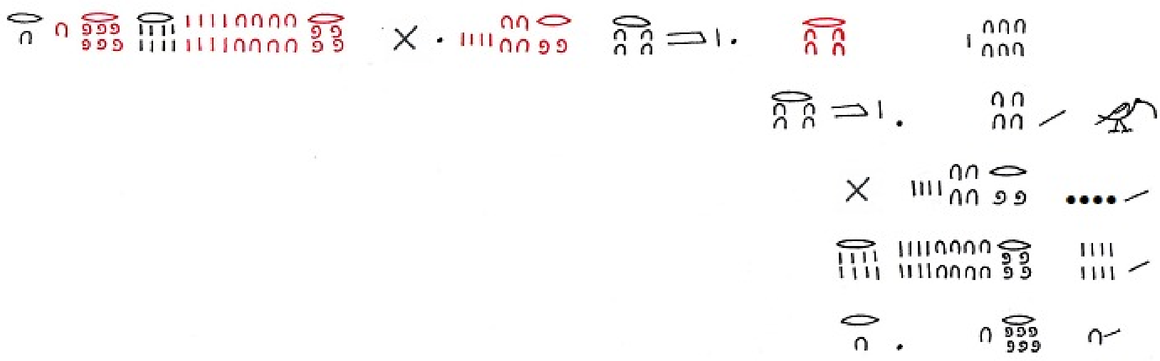
Expressions de 2 à partir de 61

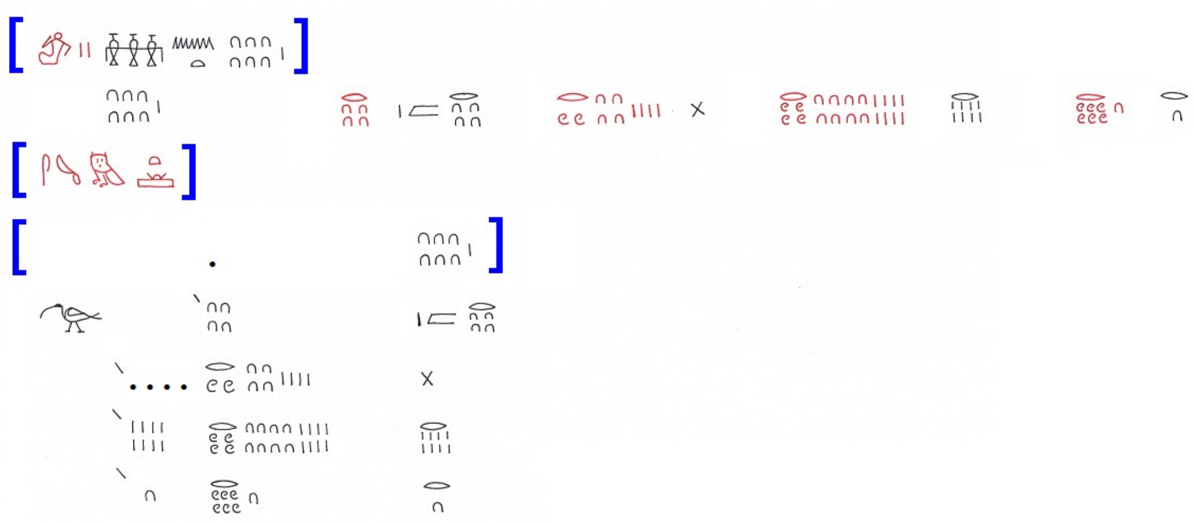
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L1		*61*	**40’**	*· 1 2’ 40’*	**244’**	*· 4’*	**488’**	*8’*	**610’**	*10’*
L2	*gm \ 40*	*· 1 2’ 40’*								
L3	*\ 4*	*244’ 4’*								
L4	*\ 8*	*488’ 8’*								
L5	*\ 10*	*610’ ·10’*								

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L1		*61*	**40’**	*· 1 2’ 40’*	**244 ’**	*· 4’*	**488’**	*8’*	**610’**	*10’*
L2	*gèm \ 40*	*· 1 2’ 40’*								
L3	*\ 4*	*244 ’ 4’*								
L4	*\ 8*	*488’ 8’*								
L5	*\ 10*	*610’ ·10’*								

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L1		61	**40’**	· 1 2’ 40’	**244 ’**	· 4’	**488’**	8’	**610’**	10’
L2	gèm$_1$ \ 40	· 1 2’ 40’								
L3	\ 4$_1$	244 ’ 4’								
L4	\ 8	488’ 8’								
L5	\ 10	610’ ·[1]10’								

1 — Le point indiquant le résultat 1/10 pose problème. Sur les dernières reproductions photographiques, le point est visible. En revanche sur le *Fac-similé* du British Museum et le travail du même ordre réalisé par Chace, il n'apparaît pas. En son temps Griffith n'en faisait pas mention et en cela a été imité par les différents traducteurs. Nous sommes là face à une incompréhension. À moins de considérer qu'à cet endroit figure un défaut de la texture du papyrus faisant croire à un point, nous avons choisi de faire confiance à la neutralité de l'objectif bien que l'interprétation d'un cliché ait sa part de subjectivité. Par ailleurs, nous devons signaler qu’en retenant ce point, nous avons la seule occurrence où Ahmès aurait mis un point pour la dernière ligne d'un calcul qui en comporte au moins quatre. On peut aussi admettre que la présence rapprochée de deux chiffres 10, l'un pour 610, l'autre pour 1/10 a poussé le scribe à marquer un point pour bien différencier les données.

TRADUCTION

$//_1$	61	**40’**	1 2’ 40’	**244’**	4’	**488’**	8’	**610’**	10’
$//_2$	Vérifie ! \	40	1 2’ 40’						
$//_3$	\ 4	244’	4’						
$//_4$	\ 8	488’	8’						
$//_5$	\ 10	610’	10’						

ADAPTATION

[**Exprime 2** à partir de 61]

61	**1/40**	1 1/2 1/40	**1/244**	1/4	**1/488**	1/8	**1/610**	1/10

[**Calcul**]

		[1	61]
Vérifie !	\	40	1 1/2 1/40
	\ 4	1/244	1/4
	\ 8	1/488	1/8
	\ 10	1/610	1/10

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 61

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 61* sont :

$$\textbf{(d}_{61}\textbf{)}\quad \frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_{61}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{40})+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}.$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant une *décomposition de type « multiple de cinq »*, nous obtenons des expressions qui sont, pour 4/61 et 8/61, respectivement, en quatre et en cinq termes :

$$\frac{1}{61}\times 4=(\frac{1}{61}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610})\otimes 2=$$

$$=(\frac{1}{2\times 20}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 122}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 244}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 305}\otimes 2)=\frac{1}{20}+\frac{1}{122}+\frac{1}{244}+\frac{1}{305}\ ;$$

$$\frac{1}{61}\times 8=(\frac{1}{61}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{20}+\frac{1}{122}+\frac{1}{244}+\frac{1}{305})\otimes 2=$$

$$=(\frac{1}{2\times 10}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 61}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 122}\otimes 2)+(\frac{1}{5\times 61}\otimes 2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{61}+\frac{1}{122}+\frac{1}{183}+\frac{1}{915}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 61

Le *quantième principal* est égal à 1/40. Il est à la fois *binaire* et *décimal*. Par suite, théoriquement et pratiquement, pour parvenir aux expressions données par l'Auteur, nous sommes conduits à effectuer la division de 2 par 61 en utilisant la *division par dix* et les *dédoublements successifs*. Ici, théoriquement, l'ordre de ces opérations est de peu d'importance mais il peut donner lieu à diverses interprétations. Ainsi, en commençant par la *division par dix*, nous pouvons laisser sous-entendre que nous nous situons dans un cadre où le quantième 1/40 est connu, c'est-à-dire dans une étude par tâtonnement. Nous proposerions alors :

1	61	(initialisation)
1/10	6 1/10	(division par dix)
1/20	3 1/20	(dédoublement)
\ 1/40	1 1/2 1/40	(dédoublement)
Manque	1/4 1/8 1/10	**(2$_{61}$)**
\ 1/244	1/4	(inversion-multiplication)
\ 1/488	1/8	(inversion-multiplication)
\ 1/610	1/10	(inversion-multiplication)

En revanche, en commençant par les *dédoublements*, nous pouvons privilégier une démarche qui semble être plus opératoire en ce sens que l'utilisation des dixièmes permet d'obtenir un résultat inférieur à 2 donc utilisable si l'on peut commodément formuler le *manque* qui lui est associé. Nous proposerions alors :

1	61	(initialisation)
1/2	30 1/2	(dédoublement)
1/4	15 1/4	(dédoublement)
1/10 de 1/4	1 1/2 1/40	(division par dix)
\ 1/40	1 1/2 1/40	(multiplication-simplification)
Manque	1/4 1/8 1/10	**(2_{61})**
\ 1/244	1/4	(inversion-multiplication)
\ 1/488	1/8	(inversion-multiplication)
\ 1/610	1/10	(inversion-multiplication)

Nous laissons le lecteur choisir son interprétation.

VÉRIFICATION

Théoriquement, l'*expression secondaire principale* peut être considérée comme étant le résultat de la division de 61 par 40. Selon la procédure employée, elle peut donc avoir diverses formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* où les quantièmes de cette expression sont des multiples du *quantième principal*, nous pouvons distinguer les deux décompositions suivantes :

$$Q = \frac{61}{40} = 1 + \frac{21}{40} = 1 + \frac{20+1}{40} = 1 + \frac{20}{40} + \frac{1}{40} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{40}\ ;$$

$$Q = \frac{61}{40} = 1 + \frac{21}{40} = 1 + \frac{10+8+2+1}{40} = 1 + \frac{10}{40} + \frac{8}{40} + \frac{2}{40} + \frac{1}{40} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}.$$

La première décomposition correspond à l'*expression secondaire* donnée par l'Auteur. Nous pouvons proposer la vérification suivante :

\ 1	40	(initialisation)
\ 1/2	20	(dédoublement)
\ 1/40	1	(inversion)
Total	61	

OBTENTION DU MANQUE

D'un point de vue théorique, nous avons

$$M = 2 - 61 \times \frac{1}{40} = 2 - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{40}) = 2 - \frac{61}{40} = \frac{80-61}{40} = \frac{19}{40}.$$

Nous en déduisons seulement deux décompositions du *manque* en moins de quatre quantièmes :

$$M = \frac{19}{40} = \frac{10+8+1}{40} = \frac{10}{40} + \frac{8}{40} + \frac{1}{40} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{40},$$

$$M = \frac{19}{40} = \frac{10+5+4}{40} = \frac{10}{40} + \frac{5}{40} + \frac{4}{40} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}.$$

La première expression, à savoir, 1/4 1/5 1/40, conduit, en tant qu'élément de la décomposition correspondante de 2/61, à un quantième très petit, 1/2440, d'où, peut-être, son rejet.

Pour revenir aux propos de l'Auteur et, par suite, à la seconde décomposition du *manque*, si nous voulons procéder par soustraction et utiliser le *procédé des auxiliaires numériques*, nous pouvons choisir le nombre 40 comme *référent commun* et diviser alors 19 par 40. Pour parvenir à l'expression donnée par l'Auteur, il suffit de commencer par des *dédoublements* :

1	40	(initialisation)
1/2	20	(dédoublement)
\ 1/4	10	(dédoublement)
\ 1/8	5	(dédoublement)
\ 1/10	4	(division par dix de l'initialisation)

Si, maintenant, nous voulons utiliser diverses relations, nous pouvons procéder comme suit. Le dernier quantième, 1/40, figure dans une seule réduction :

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40},$$

relation que nous trouvons dans le *Rouleau de cuir*. Par suite, on ajoute 1/10 qui est ainsi un élément du *manque partiel*, d'où :

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{40}) + \frac{1}{10} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{10} + \frac{1}{40}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Il manque encore 1/4 1/8, d'où le *manque* total : 1/4 1/8 1/10.

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/61

Le nombre 61 étant premier, il existe une seule *décomposition de 2/61 en deux quantièmes distincts* :

$$\textbf{(A}_{61}\textbf{)} \quad \frac{2}{61} = \frac{1}{31} + \frac{1}{1891}.$$

Il n'existe pas de *décomposition égyptienne simple* de 2/61 en trois quantièmes. Mais, si nous passons outre à la limitation 1/1000, nous avons, par exemple,

$$\frac{2}{61} = \frac{1}{36} + \frac{1}{244} + \frac{1}{1098},$$

ce qui peut souligner l'importance de certaines contraintes.

Il existe trois autres *décompositions égyptiennes simples* de 2/61 en quatre quantièmes :

$$\textbf{(B}_{61}\textbf{)}\quad \frac{2}{61}=\frac{1}{42}+\frac{1}{183}+\frac{1}{427}+\frac{1}{854}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21})+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}\ ;$$

$$\textbf{(C}_{61}\textbf{)}\quad \frac{2}{61}=\frac{1}{45}+\frac{1}{183}+\frac{1}{305}+\frac{1}{549}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{45})+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\ ;$$

$$\textbf{(D}_{61}\textbf{)}\quad \frac{2}{61}=\frac{1}{48}+\frac{1}{122}+\frac{1}{366}+\frac{1}{976}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{48})+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{16}\,.$$

La *décomposition primaire*

$$\textbf{(A}_{61}\textbf{)}\quad \frac{2}{61}=\frac{2}{61+1}+\frac{2}{61\times(61+1)}=\frac{2}{62}+\frac{2}{61\times 62}=\frac{1}{31}+\frac{1}{61\times 31}=\frac{1}{31}+\frac{1}{1891}$$

présente un handicap de taille : son *quantième principal* est l'inverse d'un nombre premier, à savoir, le nombre 31 et, par suite, les expressions correspondantes sont complexes. Nous n'insisterons pas davantage.

La *décomposition égyptienne simple* de 2/63 en quatre quantièmes

$$\textbf{(B}_{61}\textbf{)}\quad \frac{2}{61}=\frac{1}{42}+\frac{1}{183}+\frac{1}{427}+\frac{1}{854}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21})+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}\,.$$

est plus théorique que pratique. En effet, d'une part, l'obtention de l'*expression secondaire* 1 1/3 1/14 1/21 liée au *quantième principal* 1/42 est difficile. La seule autre possibilité est de considérer l'expression théorique 1 1/6 1/7 1/14 1/21 1/42 qui se simplifie en 1 1/4 1/6 1/28, décomposition qui ne donne pas une *expression égyptienne simple* puisque 1/28 n'est pas un sous-multiple de 1/42. D'autre part, l'obtention du *manque* ne peut s'effectuer que par division. Nous n'insisterons pas davantage et ce d'autant plus que la présence du quantième 1/7 dans le *manque* peut entraîner l'intrusion du quantième 1/3416 lors d'un doublement.

Le *quantième principal* de la *décomposition égyptienne simple* de 2/61 en quatre quantièmes

$$\textbf{(C}_{61}\textbf{)}\quad \frac{2}{61}=\frac{1}{45}+\frac{1}{183}+\frac{1}{305}+\frac{1}{549}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{45})+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\ ;$$

étant égal à 1/45, son inverse est un multiple de 5 et de 9. Nous pouvons parvenir à ce quantième en commençant la division de 2 par 53 à l'aide des multiplicateurs 2/3 et 1/10. Nous proposons de débuter comme suit :

1	61	(initialisation)
1/10	6 1/10	(division par dix)
1/5	3 1/5	(dédoublement)
2/3 de 1/5	8 1/10 1/30	(table de deux-tiers et R61B)
1/3 de 1/5	4 1/20 1/60	(dédoublement)
1/15	4 1/20 1/60	(multiplication-simplification)
2/3 de 1/15	2 2/3 1/30 1/90	(« table de deux-tiers »)
1/3 de 1/15	1 1/3 1/15 1/180	(dédoublement)

\ 1/45	1 1/3 1/45	(multiplication-simplification)

Ici aussi, l'obtention du *manque* est difficile. Quant aux *doublements éventuels*, la présence du quantième 1/5 ne facilite pas leur expression. Nous n'insisterons pas davantage.

Enfin, le *quantième principal* de la *décomposition égyptienne simple* de 2/61 en quatre quantièmes

$$\textbf{(D}_{61}\textbf{)}\quad \frac{2}{61}=\frac{1}{48}+\frac{1}{122}+\frac{1}{366}+\frac{1}{976}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{48})+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{16}\,.$$

étant *ternaire*, nous pouvons parvenir à ce nombre en commençant la division de 2 par 61 à l'aide des *multiplicateurs ternaires*. Nous proposons de débuter comme suit

1	61	(initialisation)
2/3	40 2/3	(« table de deux-tiers »)
1/3	20 1/3	(dédoublement)
1/6	10 1/6	(dédoublement)
1/12	5 1/12	(dédoublement)
1/24	2 1/2 1/24	(dédoublement)
\ 1/48	1 1/4 1/48	(dédoublement)

Quant à l'obtention du *manque* il suffit d'ajouter successivement 1/16, 1/6 et 1/2 :

$$(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{48})+\frac{1}{16}=1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{16}+\frac{1}{48})=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{24},$$

$$(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{24})+\frac{1}{6}=1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{24})=1+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=1+\frac{1}{2},$$

$$(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=1+1=2\,.$$

Pour les *doublements éventuels*, en utilisant les « multiples de trois », nous avons :

$$\frac{1}{61}\times 4=(\frac{1}{61}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{48}+\frac{1}{122}+\frac{1}{366}+\frac{1}{976})\otimes 2=$$

$$=(\frac{1}{2\times 24}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 61}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 183}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 488}\otimes 2)=\frac{1}{24}+\frac{1}{61}+\frac{1}{183}+\frac{1}{488}\;;$$

$$\frac{1}{61}\times 8=(\frac{1}{61}\otimes 4)\otimes 2=(\frac{1}{24}+\frac{1}{61}+\frac{1}{183}+\frac{1}{488})\otimes 2=$$

$$=(\frac{1}{2\times 12}\otimes 2)+(\frac{1}{61}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 61}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 244}\otimes 2)=$$

$$=\frac{1}{12}+(\frac{1}{48}+\frac{1}{122}+\frac{1}{366}+\frac{1}{976})+(\frac{1}{122}+\frac{1}{366})+\frac{1}{244}=$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{48}+(\frac{1}{122}+\frac{1}{122})+\frac{1}{244}+(\frac{1}{366}+\frac{1}{366})+\frac{1}{976}=\frac{1}{12}+\frac{1}{48}+\frac{1}{61}+\frac{1}{183}+\frac{1}{244}+\frac{1}{976}\,.$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/61 et de 8/61 :

	(d_{61})	**(D_{61})**
4/61	4	4
8/61	5	6

EN GUISE DE CONCLUSION

Pratiquement, le scribe aurait pu considérer une seule autre décomposition, à savoir,

$$\textbf{(D}_{61}\textbf{)} \quad \frac{2}{61} = \frac{1}{48} + \frac{1}{122} + \frac{1}{366} + \frac{1}{976} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{48}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16}\,.$$

Mais nous savons que l'Auteur n'a pas pris en considération, comme *quantième principal*, 1/48. De plus, lors des *doublements éventuels*, nous obtenons des expressions comportant un plus grand nombre de termes. Il se peut que devant l'échec des *multiplicateurs ternaires* utilisés jusqu'au quantième 1/24, le scribe ait opté pour l'utilisation des *multiplicateurs décimaux* ce qui lui a permis d'opérer facilement.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 15.
Bobynin, 1890, Sur le procédé employé dans le papyrus de Rhind, p. 111.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. IV-V.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 85, 87, 91.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, p. 258.
Bruins, 1981_2, Reducible and Trivial Decompositions Concerning Egyptian Arithmetics, p. 291.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 31.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. IV-V, pl. 18.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 56.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 129, 334.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 42, pl. V.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 148.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 64.
Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 296.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 105.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 106.
Neugebauer, 1931, Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter, p. 328.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 44, pl. C.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{30}, p. 88.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 5.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, pp. 331, 334.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363, 374, 376.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 124.