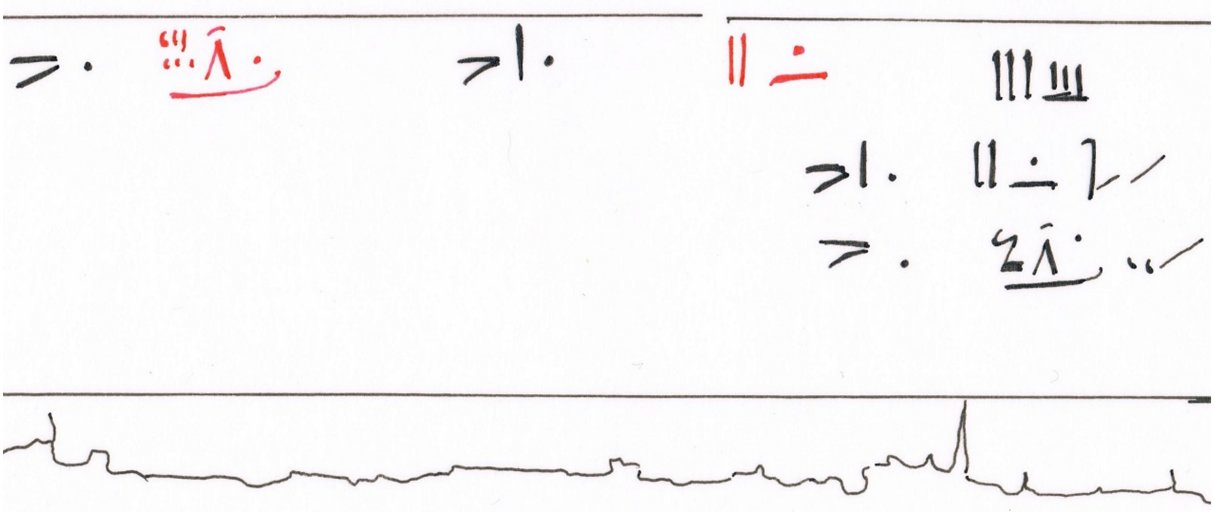
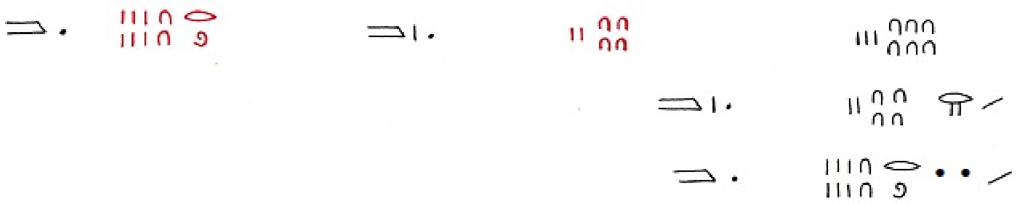
Expressions de 2 à partir de 63

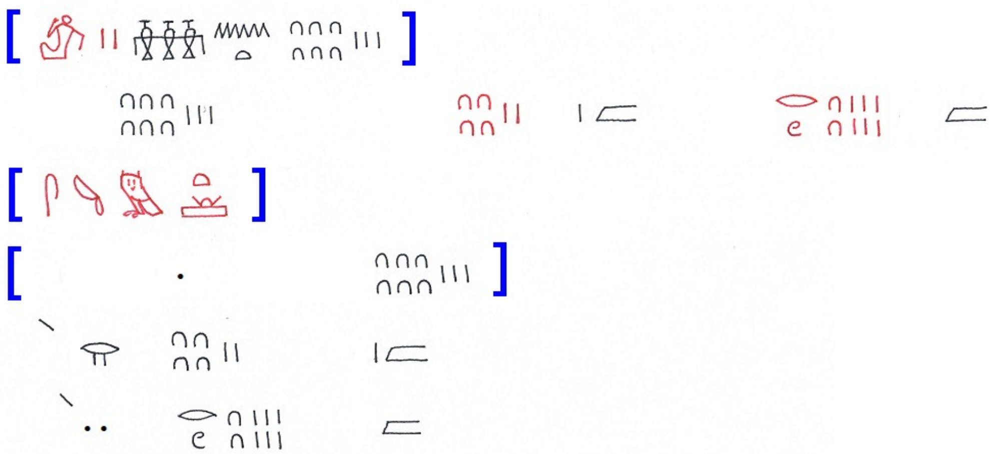
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1 *63* ***42*** *· 1 2’* ***126’*** *· 2’*

L_2 *\ 3” 42 · 1 2’*

L_3 *\ 2 126’ · 2’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1 *63* ***42**** *· 1 2’* ***126’*** *· 2’*

L_2 *\ 3’’ 42 · 1 2’*

L_3 *\ 2 126’ · 2’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 63 **42*** · 1 2’ **126_1’** · 2’

L_2 \ 3’’ 42 · 1 2’

L_3 \ 2_1 126_2’ · 2’

Traduction

//$_1$		63		**42***	1 2’	**126’**	2’
//$_2$	\ 3’’	42	1 2’				
//$_3$	\ 2	126’	2’				

ADAPTATION

[Exprime 2 à partir de 63**]**

	63		**1/42**	1 1/2	**1/126**	1/2

[Calcul]

	[1	63]
\ 2/3	42	1 1/2
\ 2	1/126	1/2

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 63

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 63* sont :

$$\text{(d}_{63}\text{)}\quad \frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126} \qquad \text{et} \qquad \text{(2}_{63}\text{)}\quad 2=(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}.$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant **(d$_{21}$)** et **(d$_{63}$)**, nous obtenons des décompositions de 4/63 et de 8/63 qui sont ainsi respectivement en deux et trois quantièmes :

$$\frac{1}{63}\times 4=(\frac{1}{63}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{42}+\frac{1}{126})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 21}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 63}\otimes 2)=\frac{1}{21}+\frac{1}{63}\ ;$$

$$\frac{1}{63}\times 8=(\frac{1}{63}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{21}+\frac{1}{63})\otimes 2=(\frac{1}{21}\otimes 2)+(\frac{1}{63}\otimes 2)=\frac{1}{14}+(\frac{1}{42}+\frac{1}{42})+\frac{1}{126}=$$
$$=\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\frac{1}{126}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 63

Les calculs écrits par Âhmès et la *décomposition de deux* **(2$_{63}$)** montrent que les expressions données par l'Auteur peuvent être rangées dans le cadre général des *décompositions de type « multiple de trois »*. Nous proposons la division suivante :

1	63	(initialisation)
2/3	42	(« table de deux-tiers »)
\ 1/42	1 1/2	(inversion)
Manque	1/2	**(2$_{63}$)**
\ 1/126	1/2	(inversion-multiplication)

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/63

Le nombre composé 63 donne lieu à cinq autres *décompositions* de 2/63 en deux quantièmes distincts supérieurs à 1/1000 :

$$\text{(A}_{63}\text{)}\quad \frac{2}{63}=\frac{1}{33}+\frac{1}{693} \qquad \text{avec} \qquad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{44})+\frac{1}{11}\ ;$$

$$\text{(B}_{63}\text{)}\quad \frac{2}{63}=\frac{1}{35}+\frac{1}{315} \qquad \text{avec} \qquad 2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30})+\frac{1}{5}\ ;$$

$$\text{(C}_{63}\text{)}\quad \frac{2}{63}=\frac{1}{36}+\frac{1}{252} \qquad \text{avec} \qquad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}\ ;$$

$$\text{(D}_{63}\text{)}\quad \frac{2}{63}=\frac{1}{45}+\frac{1}{105} \qquad \text{avec} \qquad 2=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{15})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15})\ ;$$

$$\text{(E}_{63}\text{)}\quad \frac{2}{63}=\frac{1}{56}+\frac{1}{72} \qquad \text{avec} \qquad 2=(1+\frac{1}{8})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}).$$

Il existe aussi trois *décompositions égyptiennes simples* en trois quantièmes :

(F_{63}) $\frac{2}{63}=\frac{1}{36}+\frac{1}{378}+\frac{1}{756}=\frac{1}{36}+\frac{1}{63\times 6}+\frac{1}{63\times 12}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$;

(G_{63}) $\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{189}+\frac{1}{378}=\frac{1}{42}+\frac{1}{63\times 3}+\frac{1}{63\times 6}$ avec $2=(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$;

(H_{63}) $\frac{2}{63}=\frac{1}{54}+\frac{1}{126}+\frac{1}{189}=\frac{1}{54}+\frac{1}{63\times 2}+\frac{1}{63\times 3}$ avec $2=(1+\frac{1}{6})+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

Théoriquement, la décomposition

(A_{63}) $\frac{2}{63}=\frac{1}{33}+\frac{1}{693}$,

se déduit de la *décomposition primaire*

(DP_{21}) $\frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$,

qui diffère de la décomposition **(d_{21})** déduite des expressions données par l'Auteur en R2/21. En effet, d'après **(DP_{21})**, nous pouvons écrire :

$$\frac{2}{63}=\frac{2}{21\times 3}=\frac{2}{21}\times\frac{1}{3}=(\frac{1}{11}+\frac{1}{231})\times\frac{1}{3}=\frac{1}{11\times 3}+\frac{1}{231\times 3}=\frac{1}{33}+\frac{1}{693}.$$

Le *quantième principal* de la décomposition **(A_{63})** étant égal à 1/33, lors de la division de 2 par 63, nous devons introduire le multiplicateur 1/11, ce qui peut suffire pour rejeter cette décomposition. Quant aux *doublements éventuels* nous considérons seulement le premier qui en montre bien la complexité, à savoir, quatre quantièmes pour le quadruple du quantième 1/63 ou trois avec une simplification qui est sans doute inconnue des scribes égyptiens :

$$\frac{1}{63}\times 4=(\frac{1}{63}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{33}+\frac{1}{693})\otimes 2=(\frac{1}{33}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 231}\otimes 2)=\frac{1}{22}+\frac{1}{66}+\frac{1}{462}+\frac{1}{1386}=$$

$$=\frac{1}{22}+(\frac{1}{66}+\frac{1}{1386})+\frac{1}{462}=\frac{1}{22}+\frac{1}{63}+\frac{1}{462}.$$

La *décomposition composée particulière*

(B_{63}) $\frac{2}{63}=\frac{2}{7\times(1+9)}+\frac{2}{63\times(1+9)}=\frac{1}{35}+\frac{1}{315}$ avec $2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30})+\frac{1}{5}$,

peut être obtenue à partir de la division de 2 par 63 en utilisant tout d'abord le multiplicateur 1/7 puis la division par dix :

1	63	(initialisation)
1/7	9	(division par sept ?)
1/10 de 1/7	2/3 1/5 1/30	(table de dixièmes)
1/70	2/3 1/5 1/30	(simplification)
\ 1/35	1 2/3 1/10 1/30	(doublement et simplification)
Manque	1/5	**(d_{83})**
\ 1/315	1/5	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, ils ne semblent pas présenter un grand intérêt.

Théoriquement, la décomposition

(C_{63}) $\frac{2}{63}=\frac{1}{36}+\frac{1}{252}$, se déduit de la décomposition

$$\textbf{(d}_7\textbf{)} \quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28},$$

qui résulte des expressions données par l'Auteur en R2/7. En effet, d'après **(d$_7$)**, nous pouvons écrire :

$$\frac{2}{63} = \frac{2}{7\times 9} = \frac{2}{7}\times\frac{1}{9} = (\frac{1}{4}+\frac{1}{28})\times\frac{1}{9} = \frac{1}{4\times 9}+\frac{1}{28\times 9} = \frac{1}{36}+\frac{1}{252}.$$

Nous en déduisons la même décomposition de deux, à savoir,

$$\textbf{(2}_7\textbf{)} \quad 2 = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{1}{4},$$

et la procédure des « multiples de sept » pour diviser 2 par 63 :

1	63	(initialisation)
1/9	7	(division par neuf ?)
1/18	3 1/2	(dédoublement)
\ 1/36	1 1/2 1/4	(dédoublement)
Manque	1/4	**(d$_7$)**
\ 1/252	1/4	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, leur obtention est immédiate car nous avons des inverses de multiples de quatre :

$$\frac{1}{63}\times 4 = (\frac{1}{63}\otimes 2)\otimes 2 = (\frac{1}{36}+\frac{1}{252})\otimes 2 = (\frac{1}{2\times 18}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 126}\otimes 2) = \frac{1}{18}+\frac{1}{126};$$

$$\frac{1}{63}\times 8 = (\frac{1}{63}\times 4)\otimes 2 = (\frac{1}{18}+\frac{1}{126})\otimes 2 = (\frac{1}{2\times 9}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 63}\otimes 2) = \frac{1}{9}+\frac{1}{63}.$$

Théoriquement, la décomposition

$$\textbf{(D}_{63}\textbf{)} \quad \frac{2}{63} = \frac{1}{45}+\frac{1}{105},$$

revient à utiliser la *décomposition composée* de 2/21 en deux quantièmes distincts,

$$\textbf{(C}_{21}\textbf{)} \quad \frac{2}{21} = \frac{2}{3\times 7} = \frac{2}{3\times(3+7)}+\frac{2}{7\times(3+7)} = \frac{1}{15}+\frac{1}{35} \quad \text{avec} \quad 2 = (1+\frac{1}{3}+\frac{1}{15})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}),$$

décomposition que nous ne trouvons pas en R2/21. En effet, d'après **(C$_{21}$)**, nous avons :

$$\frac{2}{63} = \frac{2}{21\times 3} = \frac{2}{21}\times\frac{1}{3} = (\frac{1}{15}+\frac{1}{35})\times\frac{1}{3} = \frac{1}{15\times 3}+\frac{1}{35\times 3} = \frac{1}{45}+\frac{1}{105}.$$

L'obtention du *quantième principal*, de la *décomposition de deux* associée ainsi que des *doublements éventuels* ne sont pas aisés (voir R2/21).

Pour la *décomposition composée généralisée*

$$\textbf{(E}_{63}\textbf{)} \quad \frac{2}{63} = \frac{2}{7\times 9} = \frac{2}{7\times(7+9)}+\frac{2}{9\times(7+9)} = \frac{1}{56}+\frac{1}{72} \quad \text{avec} \quad 2 = (1+\frac{1}{8})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}),$$

son *quantième principal* et sa décomposition de deux associée peuvent être obtenus à partir de la division de 2 par 63 en utilisant tout d'abord le multiplicateur 1/7 puis les *dédoublements successifs* :

1	63	(initialisation)
1/7	9	(division par sept ?)
1/14	4 1/2	(dédoublement)
1/28	2 1/4	(dédoublement)
\ 1/56	1 1/8	(dédoublement)
Manque	1/2 1/4 1/8	
\ 1/72	1/2 1/4 1/8	(division de 63 par 72)

En fait, cette division conduit à la *décomposition égyptienne simple* en quatre quantièmes suivante :

$$\frac{2}{63}=\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}+\frac{1}{504}.$$

Toutefois, nous pouvons aussi envisager une autre procédure pour diviser 2 par 63 :

1	63	(initialisation)
1/2	31 1/2	(dédoublement)
1/4	15 1/2 1/4	(dédoublement)
1/8	7 1/2 1/4 1/8	(dédoublement)
1/7 de 1/8	1 1/14 1/28 1/56	(division par sept)
\ 1/56	1 1/8	(simplification)
Manque	1/2 1/4 1/8	
\ 1/72	1/2 1/4 1/8	(division de 63 par 72)

La réduction que nous avons alors employée est connue de l'Auteur (voir R2/97, R7B, R9 et R12). Quant aux *doublements éventuels*, leur obtention est immédiate car nous avons des inverses de multiples de huit :

$$\frac{1}{63}\times 4=(\frac{1}{63}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{56}+\frac{1}{72})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 28}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 36}\otimes 2)=\frac{1}{28}+\frac{1}{36}\ ;$$

$$\frac{1}{63}\times 8=(\frac{1}{63}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{28}+\frac{1}{36})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 14}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 18}\otimes 2)=\frac{1}{14}+\frac{1}{18}.$$

La décomposition

(F$_{63}$) $\frac{2}{63}=\frac{1}{36}+\frac{1}{378}+\frac{1}{756}=\frac{1}{36}+\frac{1}{63\times 6}+\frac{1}{63\times 12}$ avec $2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$;

revient à moins bien écrire le *manque* lors de la division que nous avons proposée pour **(C$_{63}$)**.

La décomposition

(G$_{63}$) $\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{189}+\frac{1}{378}=\frac{1}{42}+\frac{1}{63\times3}+\frac{1}{63\times6}$ avec $2=(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$,

revient à moins bien écrire le *manque* lors de la division de 2 par 63 que nous avons proposée pour obtenir les expressions de l'Auteur.

Enfin, la décomposition

(H$_{63}$) $\frac{2}{63}=\frac{1}{54}+\frac{1}{126}+\frac{1}{189}=\frac{1}{54}+\frac{1}{63\times2}+\frac{1}{63\times3}$ avec $2=(1+\frac{1}{6})+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

revient à utiliser plusieurs fois le multiplicateur deux-tiers lors de la division de 2 par 63 :

1	63	(initialisation)
2/3	42	(« table deux-tiers »)
1/3	21	(dédoublement)
\ 2/3 de 1/3	14	(« table deux-tiers »)
1/3 de 1/3	7	(dédoublement)
1/9	7	(simplification)
2/3 de 1/9	4 2/3	(« table deux-tiers »)
1/3 de 1/9	2 1/3	(dédoublement)
1/27	2 1/3	(simplification)
\ 1/54	1 1/6	(dédoublement)
Manque	1/2 1/3	
\ 1/126	1/2	(inversion-multiplication)
\ 1/189	1/3	(inversion-multiplication)

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/63 et de 8/63 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

	(d$_{63}$)	**(A$_{63}$)**	**(B$_{63}$)**	**(C$_{63}$)**	**(D$_{63}$)**	**(E$_{63}$)**	**(F$_{63}$)**	**(G$_{63}$)**	**(H$_{63}$)**
4/63	2	4 <u>**3**</u>	?	2	3	2	?	?	?
8/63	3	<u>**4**</u>	?	2	5	2	?	?	?

EN GUISE DE CONCLUSION

Seule, la *décomposition composée généralisée*

(E$_{63}$) $\frac{2}{63}=\frac{1}{56}+\frac{1}{72}$ avec $2=(1+\frac{1}{8})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})$,

pourrait retenir notre attention eu égard aux facilités qui en résultent pour des *doublements éventuels*. Mais, par l'emploi des *dédoublements successifs*, la division de 2 par 63 conduit alors, « naturellement », à une décomposition en quatre quantièmes. Ceci peut sembler suffire pour utiliser et retenir la procédure relative aux « multiples de trois ».

Notons que si nous délaissons la petitesse de certains quantièmes, nous pouvons considérer la *décomposition primaire* qui donne lieu aux expressions suivantes :

(DP$_{63}$) $\frac{2}{63} = \frac{2}{63+1} + \frac{2}{63 \times (63+1)} = \frac{1}{32} + \frac{1}{2016}$ avec $2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}) + \frac{1}{32}$.

Elle présente l'avantage de faciliter les *doublements éventuels* puisque nous sommes en présence de sous-multiples du quantième 1/32 pour exprimer 2/63. En dehors du fait que le nombre 63 est un multiple de trois, le nombre excessif des *dédoublements* nécessaire pour son obtention ainsi que la petitesse du quantième non principal suffisent pour rejeter, théoriquement, cette décomposition.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, p. 3.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. IV-V.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1975_1, The Part in Ancient Egyptian Mathematics, pp. 244-245.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 56.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. IV-V, pl. 19.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 31.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 129, 335.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 42, pl. V.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 148.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 64.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, p. 131.
Gunn, 1926_1, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 137.
Hultsch, 1897, Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung, p. 82.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 99, 102.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 44, pl. C.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{31}, p. 89.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 5.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 335.
Vogel, 1929, Erweitert die Lederrolle unsere Kenntnis ägyptischer Mathematik ? p. 393.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, pp. 124-125.