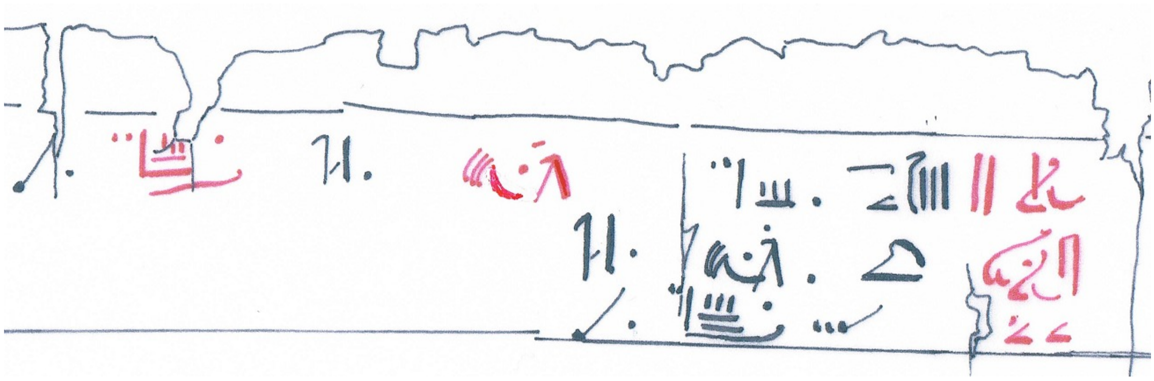
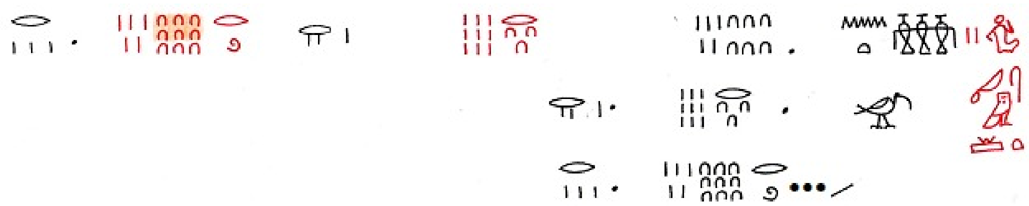
Expressions de 2 à partir de 65

Quelques brisures affectent très peu certains chiffres. Nous pouvons les restituer aisément.

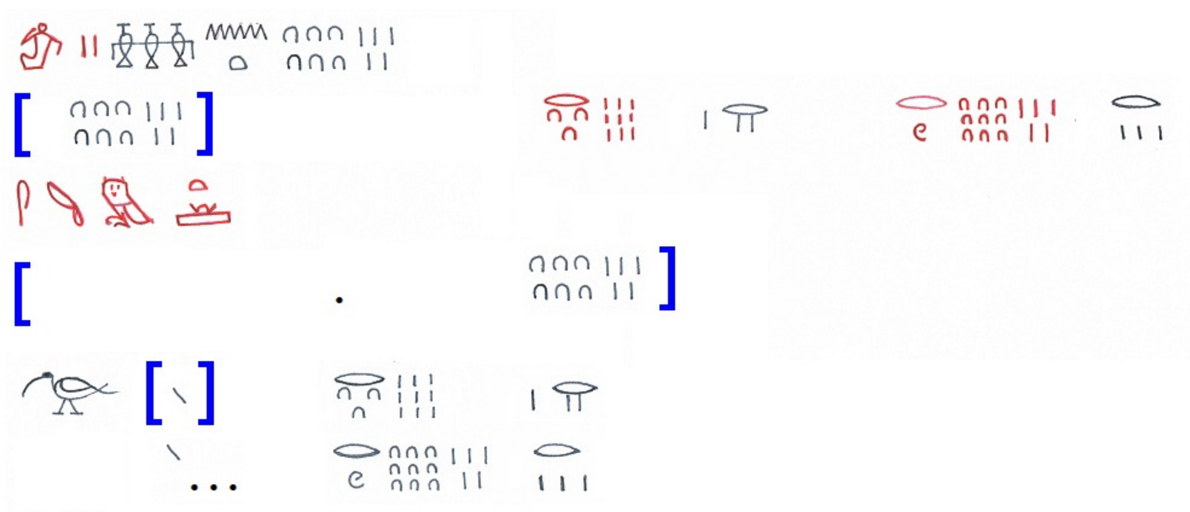
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1 ***njs* 2** *xnt · 65* ***39’*** *· 1 3”* ***195’*** *· 3’*
L_2 ***sS-*** *gm · 39’ · 1 3”*
L_3 ***m.t*** *\ 3 195’ · 3’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1 ***nis* 2** *khénèt · 65* ***39’*** *· 1 3’’* ***195’*** *· 3’*
L_2 ***séché-*** *gèm · 39’ · 1 3’’*
L_3 ***mèt*** *\ 3 195’ · 3’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 **nis$_1$ 2** khénèt$_1$ · 65 **39’** · 1 3’’ **195’**[1] · 3’
L_2 **séché-** gèm$_1$ · 39’ · 1 3’’
L_3 **mèt$_1$** \ 3$_1$ 195’[2] · 3’

1 — Le sommet du chiffre 90 est dans une lacune

2 — Une partie du sommet du chiffre 5 est dans une brisure.

Traduction

$//_1$	**Exprime 2** à partir de 65		**39’**	1 3’’	**195’**	3’
$//_{2a}$	**Calcul**					
$//_{2b}$	Vérifie !	·	39’	1 3’’		
$//_3$		\ 3	195’	3’		

ADAPTATION

Exprime 2 à partir de 65						
	[65]		**1/39**	1 2/3	**1/195**	1/3
Calcul						
		[1		65]		
Vérifie !	[\]	1/39		1 2/3		
	\ 3	1/195		1/3		

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 65

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 65* sont :

$$\textbf{(d}_{65}\textbf{)} \quad \frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_5\textbf{)} \quad 2=(1+\frac{2}{3})+\frac{1}{3}.$$

La *décomposition de deux* montre que les expressions données par l'Auteur peuvent être rangées dans le cadre général des *décompositions de type « multiple de cinq »*. Ceci est aussi confirmé par l'expression concernant le doublement du quantième 1/65. En effet, d'après **(d_5)**, nous avons :

$$\frac{2}{65}=\frac{2}{5\times 13}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{13}=(\frac{1}{3}+\frac{1}{15})\times\frac{1}{13}=\frac{1}{3\times 13}+\frac{1}{15\times 13}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195}.$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant une *décomposition de type « multiple de trois »* pour exprimer 2/195, nous pouvons obtenir les décompositions suivantes de 4/65 et 8/65 en quatre quantièmes :

$$\frac{1}{65}\times 4=(\frac{1}{65}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{39}+\frac{1}{195})\otimes 2=(\frac{1}{3\times 13}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 65}\otimes 2)=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}+\frac{1}{130}+\frac{1}{390}\ ;$$

$$\frac{1}{65}\times 8=(\frac{1}{65}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{26}+\frac{1}{78}+\frac{1}{130}+\frac{1}{390})\otimes 2=$$

$$=(\frac{1}{2\times 13}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 39}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 65}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 195}\otimes 2)=\frac{1}{13}+\frac{1}{39}+\frac{1}{65}+\frac{1}{195}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 65

La *décomposition de deux* **(2_{65})** étant égale à **(2_5)**, nous pouvons considérer que nous sommes en présence d'une *décomposition de type « multiple de cinq »*. Nous proposons la division suivante :

1	65	(initialisation)
1/5	13	(division par cinq)
1/13	5	(inversion)
2/3 de 1/13	3 1/3	(« table de deux-tiers »)
1/3 de 1/13	1 2/3	(dédoublement et réduction de 1/2 1/6 en 2/3)
\ 1/39	1 2/3	(multiplication-simplification)
Manque	1/3	**(2_5)**
\ 1/195	1/3	(inversion-multiplication)

VÉRIFICATION

Théoriquement, l'*expression secondaire principale* peut être considérée comme étant le résultat de la division de 65 par 39. Selon la procédure employée, elle peut donc avoir diverses formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* où les quantièmes de cette expression sont des multiples du *quantième principal*, nous avons la seule décomposition suivante où les quantièmes sont absents et où seul le deux-tiers entre en jeu :

$$Q = \frac{65}{39} = 1 + \frac{26}{39} = 1 + \frac{2}{3}.$$

Nous en déduisons la vérification suivante:

\ 1	39	(initialisation)
\ 2/3	26	(« table de deux-tiers »)
Total	65	

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/65

Le nombre 65 étant le produit des deux nombres premiers 5 et 13, il existe deux autres *décompositions de 2/65 en deux quantièmes distincts supérieurs à 1/1000* :

(A_{65}) $\frac{2}{65} = \frac{1}{35} + \frac{1}{455}$ avec $2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}) + \frac{1}{7}$,

(B_{65}) $\frac{2}{65} = \frac{1}{45} + \frac{1}{117}$ avec $2 = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{18})$.

Il existe deux *décompositions égyptiennes simples* en trois termes :

(C_{65}) $\frac{2}{65} = \frac{1}{40} + \frac{1}{260} + \frac{1}{520}$ avec $2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}) + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$,

(D_{65}) $\frac{2}{65} = \frac{1}{50} + \frac{1}{130} + \frac{1}{325}$ avec $2 = (1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$.

Théoriquement, la décomposition

(A_{65}) $\frac{2}{65} = \frac{1}{35} + \frac{1}{455}$,

se déduit de la *décomposition primaire*

(DP_{13}) $\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91}$,

qui diffère de l'expression **(d_{13})** que nous déduisons des propos de l'Auteur en R2/13. En effet, d'après **(DP_{13})**, nous pouvons écrire :

$$\frac{2}{65} = \frac{2}{5 \times 13} = \frac{2}{13} \times \frac{1}{5} = (\frac{1}{7} + \frac{1}{91}) \times \frac{1}{5} = \frac{1}{7 \times 5} + \frac{1}{91 \times 5} = \frac{1}{35} + \frac{1}{455}.$$

Il s'agit donc d'une *décomposition de type « primaire multiple de cinq »*. Elle doit être située dans le domaine théorique. Il est difficile d'introduire naturellement le quantième 1/35. Néanmoins, nous pouvons diviser 65 par 35 de manière à obtenir la *décomposition de deux* qui peut lui être associée :

$$2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}) + \frac{1}{7}.$$

Comme pour **(DP13)**, cette décomposition ne semble pas présenter un grand intérêt.

La *décomposition* **(B65)** est *composée*. En effet, nous avons :

(DC65) $\frac{2}{65} = \frac{2}{5 \times 13} = \frac{2}{5 \times (5+13)} + \frac{2}{13 \times (5+13)} = \frac{1}{45} + \frac{1}{117}$ avec $2 = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{18})$,

Elle ne semble pas présenter un quelconque avantage. Son obtention est plus difficile et, comme celle proposée par l'Auteur, elle comporte deux quantièmes qui sont tous des inverses de « multiples impairs de trois » conduisant à des expressions en quatre quantièmes pour les *doublements éventuels* :

$$\frac{1}{65} \times 4 = (\frac{1}{65} \otimes 2) \otimes 2 = (\frac{1}{45} + \frac{1}{117}) \otimes 2 = (\frac{1}{3 \times 15} \otimes 2) + (\frac{1}{3 \times 39} \otimes 2) = \frac{1}{30} + \frac{1}{90} + \frac{1}{78} + \frac{1}{234};$$

$$\frac{1}{65} \times 8 = (\frac{1}{65} \times 4) \otimes 2 = (\frac{1}{30} + \frac{1}{78} + \frac{1}{90} + \frac{1}{234}) \otimes 2 =$$

$$= (\frac{1}{2 \times 15} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 39} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 45} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 117} \otimes 2) = \frac{1}{15} + \frac{1}{39} + \frac{1}{45} + \frac{1}{117}.$$

La *décomposition égyptienne simple* en trois termes :

(C65) $\frac{2}{65} = \frac{1}{40} + \frac{1}{260} + \frac{1}{520}$ avec $2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}) + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$,

peut être obtenue de deux manières différentes. La première consiste à remarquer que la *décomposition de deux* qui peut lui être associée est la même que celle que nous trouvons en R2/13. Autrement dit, nous avons une *décomposition de type « facteur distinct de cinq »*. Dès lors, nous sommes amenés à proposer la division suivante :

1	65	(initialisation)
1/5	13	(division par cinq)
1/10	6 1/2	(dédoublement)
1/20	3 1/4	(dédoublement)
\ 1/40	1 1/2 1/8	(dédoublement)
Manque	1/4 1/8	(binaire)
\ 1/260	1/4	(inversion-multiplication)
\ 1/520	1/8	(inversion-multiplication)

La deuxième procédure peut être placée dans le domaine de l'obtention par divers essais, comme nous pouvons la retenir en R2/61, R2/67 et R2/71, exercices où l'Auteur donne 1/40 comme *quantième principal*. Le début de la division de 2 par 65 est par suite différent :

1	65	(initialisation)

	1/10	6 1/2	(*table de dixièmes*)
	1/20	3 1/4	(dédoublement)
\	1/40	1 1/2 1/8	(dédoublement)

Il n'en demeure pas moins que, pour les *doublements éventuels*, nous obtenons immédiatement des expressions de 4/65 et de 8/65 en trois quantièmes, ce qui rend les expressions obtenues fort commodes :

$$\frac{1}{65}\times 4=(\frac{1}{65}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{40}+\frac{1}{260}+\frac{1}{520})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 20}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 130}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 260}\otimes 2)=$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{130}+\frac{1}{260}\ ;$$

$$\frac{1}{65}\times 8=(\frac{1}{65}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{20}+\frac{1}{130}+\frac{1}{260})\otimes 2=$$

$$=(\frac{1}{2\times 10}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 65}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 130}\otimes 2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{65}+\frac{1}{130}.$$

La *décomposition égyptienne simple* en trois termes :

$$\textbf{(D}_{\textbf{65}}\textbf{)}\quad \frac{2}{65}=\frac{1}{50}+\frac{1}{130}+\frac{1}{325}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{10})+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}.$$

est moins utile que la précédente car, d'une part, le quantième 1/325 est l'inverse d'un nombre impair multiple de cinq et, d'autre part, la *décomposition de deux* est difficile à justifier, ou, en d'autres termes, l'obtention de l'expression du *manque* est moins aisée.

Enfin, la décomposition égyptienne non simple suivante

$$\textbf{(E}_{\textbf{65}}\textbf{)}\quad \frac{2}{65}=\frac{1}{52}+\frac{1}{130}+\frac{1}{260}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

revient, théoriquement, à utiliser la *décomposition égyptienne simple* suivante de 2/5 en trois quantièmes distincts :

$$\textbf{(A}_{\textbf{5}}\textbf{)}\quad \frac{2}{5}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5\times 2}+\frac{1}{5\times 4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\quad \text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

décomposition qui diffère de **(d_5)**. En effet, d'après **(A_5)**, nous avons :

$$\frac{2}{65}=\frac{2}{5\times 13}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{13}=(\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20})\times\frac{1}{13}=\frac{1}{4\times 13}+\frac{1}{10\times 13}+\frac{1}{20\times 13}=\frac{1}{52}+\frac{1}{130}+\frac{1}{260}.$$

Elle peut être obtenue en divisant 2 par 45 comme suit :

1	65	(initialisation)
1/5	13	(division par cinq)

1/13	5	(inversion)
1/26	2 1/2	(dédoublement)
\ 1/52	1 1/4	(dédoublement)
Manque	1/2 1/4	(binaire)
\ 1/130	1/2	(inversion-multiplication)
\ 1/260	1/4	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, nous avons

$$\frac{1}{65}\times 4=(\frac{1}{65}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{52}+\frac{1}{130}+\frac{1}{260})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 26}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 65}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 130}\otimes 2)=$$

$$=\frac{1}{26}+\frac{1}{65}+\frac{1}{130}\ ;$$

$$\frac{1}{65}\times 8=(\frac{1}{65}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{26}+\frac{1}{65}+\frac{1}{130})\otimes 2=$$

$$=(\frac{1}{2\times 13}\otimes 2)+(\frac{1}{65}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 65}\otimes 2)=\frac{1}{13}+\frac{1}{52}+\frac{1}{130}+\frac{1}{260}+\frac{1}{65}=$$

$$=\frac{1}{13}+(\frac{1}{13\times 4}+\frac{1}{13\times 5}+\frac{1}{13\times 20})+\frac{1}{130}=\frac{1}{13}+\frac{1}{13\times 2}+\frac{1}{130}=\frac{1}{13}+\frac{1}{26}+\frac{1}{130}\,.$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/65 et de 8/65 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

	(d_{65})	**(A_{65})**	**(B_{65})**	**(C_{65})**	**(D_{65})**	**(E_{65})**
4/65	4	?	4	3	?	3
8/65	4	?	4	3	?	<u>**3**</u>

EN GUISE DE CONCLUSION

Comme toujours, nous ne savons pas si l'Auteur a pu préférer certaines expressions. Aujourd'hui, nous choisirions la décomposition

$$\textbf{(C}_{65}\textbf{)}\quad \frac{2}{65}=\frac{1}{40}+\frac{1}{260}+\frac{1}{520}\qquad \text{avec}\qquad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8})+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$

dont nous précisons quelques avantages : facilité d'obtention, expression commode pour les *doublements éventuels* et procédure semblable à celle appliquée par l'Auteur en R2/95 : nous parlons à ce propos de *décomposition de type « facteur distinct de cinq »*. Mais, nous avons aussi indiqué deux procédures possibles nous permettant de parvenir à ces expressions. L'Auteur ne les ayant pas considérées, il nous est encore plus difficile de savoir quelle technique il choisirait. Il nous semble que nous pouvons ranger toutes les expressions données par l'Auteur dans le cadre des multiples de cinq et que, par suite, une procédure par essais doive être exclue.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, p. 3.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. V.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, p. 89.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, p. 259.
Bruins, 1975_1, The Part in Ancient Egyptian Mathematics, p. 250.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 56.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. V-VI, pl. 20.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 31.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 129, 335.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 42, pl. VI.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 149.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 64.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 104, 121, 127-128.
Hultsch, 1897, Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung, p. 186.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 138, 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 100, 102.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 44, pl. C.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{32}, p. 89.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 5-6.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 336.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363-364, 367, 369, 377, 381-382.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Van der Waerden, 1980, The (2: n) Table in the Rhind Papyrus, p. 266.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 125.