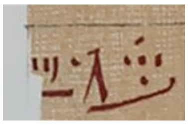
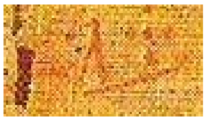
Expressions de 2 à partir de 67

Les diverses reproductions qui nous sont parvenues du texte de l’exercice R2/67 laissent voir diverses variantes qui, toutefois, n’affectent pas la restitution de l’écrit d’Âhmès. Tout d’abord, à la première ligne, une partie du chiffre 6 du quantième 1/536 est manquante.


Fac-similé


Chace

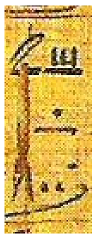

Robins, Shute


Site

Ensuite, à la troisième ligne, une brisure atteint légèrement le sommet du chiffre 30 pour le quantième 1/30. En conséquence nous l'avons restitué dans sa totalité dans notre reproduction hiératique, mais pour ne pas sombrer dans le pédantisme nous avons volontairement omis de mettre de l'orange dans la transcription hiéroglyphique car le point hiératique à gauche de l'écriture principale montre qu'il n'y a aucune ambiguïté de lecture. Nous pouvons remarquer que le manque est plus important dans la reproduction donnée par l’équipe formée autour de Chace que dans le *Fac-similé* publié par le British Museum


Fac-similé


Chace


Robins, Shute


Site

Enfin, les reproductions plus récentes laissent voir l’effacement des chiffres 5 et 6 dans la partie calcul, alors qu’ils sont présents dans les textes précités.

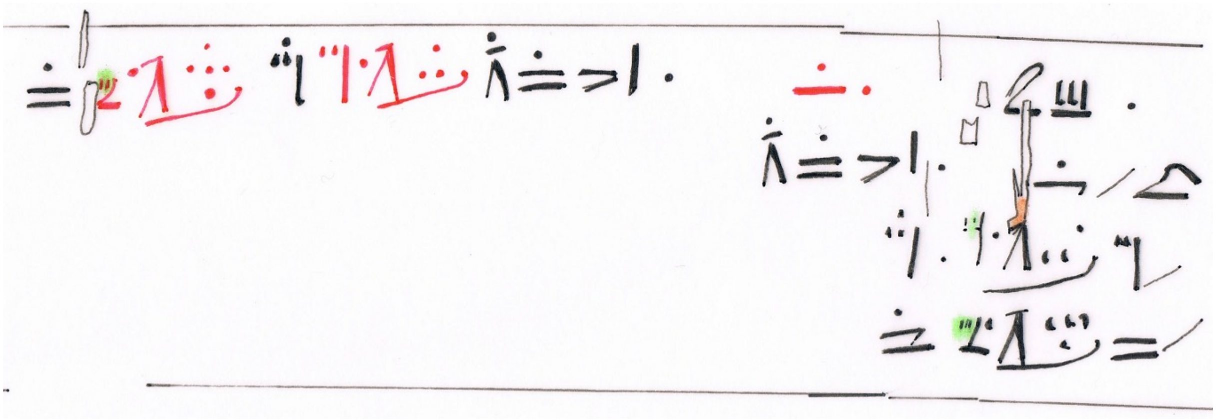

Fac-similé


Chace

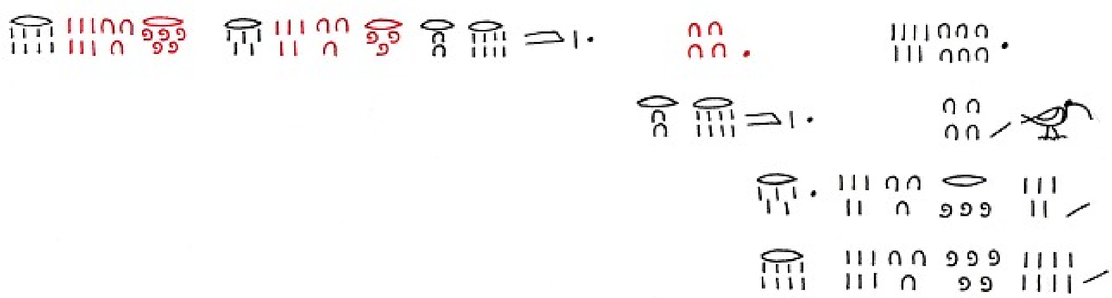

Robins, Shute


Site

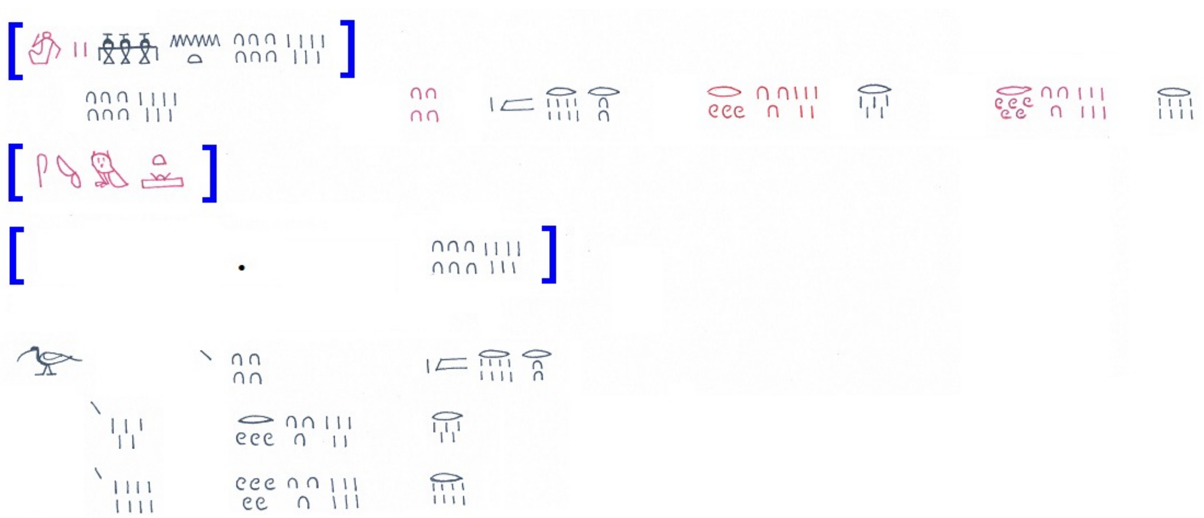
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L1	*· 67 · **40*** · 1 2' 8' 20' **335'** 5' **536'** 8'*
L2	*gm \ 40 · 1 2' 8' 20'*
L3	*\ 5 335' · 5'*
L4	*\ 8 536 8'*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L1	*· 67 · **40*** · 1 2' 8' 20' **335'** 5' **536'** 8'*
L2	*gèm \ 40 · 1 2' 8' 20'*
L3	*\ 5 335' · 5'*
L4	*\ 8 536 8'*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L1	· 67 · **40*** · 1 2' 8' 20' **335'** 5' **536_2'** 8'
L2	$gèm_1$ \ 40 · 1 2' 8' 20'
L3	\ 5 335' · 5'
L4	\ 8 536_2 8'

Traduction

//$_1$		67		**40***	1 2’ 8’ 20’	**335’**	5’	**536’**	8’
//$_2$	Vérifie ! \		40	1 2’ 8’ 20’					
//$_3$	\ 5		335’	5’					
//$_4$	\ 8		536	8’					

ADAPTATION

[**Exprime 2** à partir de 67]

	67	**1/40**	1 1/2 1/8 1/20	**1/335**	1/5	**1/536**	1/8

[**Calcul**]

		[1	67]
Vérifie !	\	40	1 1/2 1/8 1/20
	\ 5	1/335	1/5
	\ 8	536	1/8

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 67

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 67* sont :

$$\textbf{(d}_{67}\textbf{)}\quad \frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_{67}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20})+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}.$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant des *décompositions de type « multiple de trois »* et une *décomposition de type « multiple de cinq »*, nous obtenons des expressions qui sont, pour 4/67 et 8/67, en quatre quantièmes :

$$\frac{1}{67}\times 4=(\frac{1}{67}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 20}\otimes 2)+(\frac{1}{5\times 67}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 268}\otimes 2)=$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{201}+\frac{1}{268}+\frac{1}{1005}\ ;$$

$$\frac{1}{67}\times 8=(\frac{1}{67}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{20}+\frac{1}{201}+\frac{1}{268}+\frac{1}{1005})\otimes 2=$$

$$=(\frac{1}{2\times 10}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 67}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 134}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 335}\otimes 2)=$$

$$=\frac{1}{10}+(\frac{1}{134}+\frac{1}{134})+\frac{1}{670}+(\frac{1}{6\times 67}+\frac{1}{30\times 67})=\frac{1}{10}+\frac{1}{67}+\frac{1}{5\times 67}+\frac{1}{670}=$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{67}+\frac{1}{335}+\frac{1}{670}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 67

La considération du *quantième principal* 1/40 laisse la porte ouverte à diverses possibilités. En effet, nous devons considérer deux *dédoublements* et une *division par dix*. L'ordre de ces trois opérations peut influer sur le résultat obtenu. Ainsi, nous pouvons effectuer la *division par dix* au début et procéder alors comme suit :

1	67	(initialisation)
1/10	6 2/3 1/30	(division par dix)
1/20	3 1/3 1/60	(dédoublement)
1/40	1 1/2 1/6 1/120	(dédoublement)

Le résultat est fort différent de celui qui est écrit par Âhmès. En fait, nous avons voulu rester dans le cadre du *Papyrus Rhind* en utilisant la *table de dixièmes* écrite par Âhmès et pris 2/3 1/30 comme résultat correspondant au dixième de 7. Or, nous pourrions suivre les scribes qui ont rédigé le *Papyrus Michigan 621* ou le *Papyrus d'Akhmîm*. Ils retiennent la valeur 1/2 1/5. Nous aboutirions alors facilement au dire de l'Auteur :

1	67	(initialisation)
1/10	6 1/2 1/5	(division par dix)
1/20	3 1/4 1/10	(dédoublement)
1/40	1 1/2 1/8 1/20	(dédoublement)

Nous pouvons aussi envisager de commencer par les *dédoublements* :

1	67	(initialisation)
1/2	33 1/2	(dédoublement)
1/4	16 1/2 1/4	(dédoublement)
1/10 de 1/4	1 1/2 1/10 1/20 1/40	(division par dix)
1/40	1 1/2 1/10 1/20 1/40	(multiplication-simplification)

Cette fois, nous pouvons évoquer l'égalité

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40}$$

que nous avons déjà rencontrée à propos de R2/61.

Nous avons préféré effectuer la *division par dix* entre les deux dédoublements :

	1	67	(initialisation)
	1/2	33 1/2	(dédoublement)
	1/10 de 1/2	3 1/5 1/10 1/20	(division par dix)
	1/20	3 1/5 1/10 1/20	(multiplication-simplification)
	1/20	3 1/4 1/10	(réduction de 1/5 1/20 en 1/4)
\	1/40	1 1/2 1/8 1/20	(dédoublement)
	Manque	1/5 1/8	**(2_{67})**
\	1/335	1/5	(inversion-multiplication)
\	1/536	1/8	(inversion-multiplication)

Cette procédure peut sembler être assez artificielle. Toutefois, elle tient au fait que la *division par dix* donne des résultats plus ou moins complexes selon les nombres auxquels on l'applique. Elle présente l'avantage d'utiliser des quantièmes assez grands et la même réduction dans les calculs auxiliaires ainsi que dans l'établissement du *manque*. Nous avons préféré cette dernière option qui, rappelons-le, est explicitée dans le cadre du *Papyrus Rhind* (voir la *division par dix*) :

VÉRIFICATION

Théoriquement, l'*expression secondaire principale* peut être considérée comme étant le résultat de la division de 67 par 40. Selon la procédure employée, elle peut donc avoir diverses formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* où les quantièmes de cette expression sont des multiples du *quantième principal*, nous pouvons distinguer les trois décompositions suivantes :

$$Q = \frac{67}{40} = 1 + \frac{27}{40} = 1 + \frac{20+5+2}{40} = 1 + \frac{20}{40} + \frac{5}{40} + \frac{2}{40} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20} \ ;$$

$$Q = \frac{67}{40} = 1 + \frac{27}{40} = 1 + \frac{20+4+2+1}{40} = 1 + \frac{20}{40} + \frac{4}{40} + \frac{2}{40} + \frac{1}{40} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} \ ;$$

$$Q = \frac{67}{40} = 1 + \frac{27}{40} = 1 + \frac{10+8+5+4}{40} = 1 + \frac{10}{40} + \frac{8}{40} + \frac{5}{40} + \frac{4}{40} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}.$$

La première décomposition correspond à l'*expression secondaire* donnée par l'Auteur. Nous pouvons proposer la vérification suivante :

\	1	40	(initialisation)
\	1/2	20	(dédoublement)
	1/4	10	(dédoublement)
\	1/8	5	(dédoublement)
	Manque	2	
	1/40	1	(inversion)
\	1/20	2	(doublement)
	Total	67	

OBTENTION DU MANQUE

D'un point de vue théorique, nous avons une seule décomposition « utile » pour exprimer le *manque* :

$$M = 2 - 67 \times \frac{1}{40} = 2 - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20}) == 2 - \frac{67}{40} = \frac{80-67}{40} = \frac{13}{40} = \frac{8+5}{40} = \frac{8}{40} + \frac{5}{40} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8}.$$

Si nous voulons procéder par soustraction et utiliser le *procédé des auxiliaires numériques*, nous pouvons choisir le nombre 40 pour *référent commun* et diviser alors 13 par 40. Pour parvenir à l'expression donnée par l'Auteur, il suffit de commencer par des *dédoublements* :

	1	40	(initialisation)
	1/2	20	(dédoublement)
	1/4	10	(dédoublement)
\	1/8	5	(dédoublement)
\	1/5	8	(inversion)

Si, maintenant, nous voulons utiliser diverses relations, nous pouvons procéder comme suit. Le dernier quantième, 1/20, figure dans une seule réduction :

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}.$$

Par suite, on ajoute 1/5 qui est ainsi un élément du *manque*, d'où :

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20}) + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} + \frac{1}{20}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Il manque encore 1/8 :

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 1 + 1 = 2.$$

Donc le *manque* total est 1/5 1/8.

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/67

Le nombre 67 étant premier, il existe une seule *décomposition de 2/67 en deux quantièmes distincts* :

$$\textbf{(A}_{67}\textbf{)} \quad \frac{2}{67} = \frac{1}{34} + \frac{1}{2278}.$$

Il existe une autre *décomposition égyptienne simple* de 2/67 en trois quantièmes :

$$\textbf{(B}_{67}\textbf{)} \quad \frac{2}{67} = \frac{1}{42} + \frac{1}{201} + \frac{1}{938} \quad \text{avec} \quad 2 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{14}.$$

Il n'existe pas de *décomposition égyptienne simple* de 2/67 en quatre quantièmes.

La *décomposition primaire*

$$\textbf{(A}_{67}\textbf{)} \quad \frac{2}{67} = \frac{2}{67+1} + \frac{2}{67\times(67+1)} = \frac{2}{68} + \frac{2}{67\times 68} = \frac{1}{34} + \frac{1}{67\times 34} = \frac{1}{34} + \frac{1}{2278}$$

présente plusieurs handicaps. D'une part, son *quantième principal* et son dernier quantième sont des sous-multiples de l'inverse du nombre premier 17 et, d'autre part, son dernier quantième est très petit. Nous n'insisterons pas davantage.

Le *quantième principal* de la *décomposition égyptienne simple* de 2/67 en trois quantièmes

$$\textbf{(B}_{67}\textbf{)} \quad \frac{2}{67} = \frac{1}{42} + \frac{1}{201} + \frac{1}{938} \quad \text{avec} \quad 2 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{14}.$$

étant égal à 1/42, nous pouvons parvenir à ce nombre en commençant la division de 2 par 67 à l'aide de dédoublements et des multiplicateurs 2/3 et 1/7. Nous proposons de débuter comme suit

	1	67	(initialisation)
	2/3	44 2/3	(« table de deux-tiers »)
	1/3	22 1/3	(dédoublement)
	1/6	11 1/6	(dédoublement)
	1/7 de 1/6	1 1/2 1/14 1/42	(division par sept)
\	1/42	1 1/2 1/14 1/42	(multiplication-simplification)

Quant à l'obtention du *manque* il suffit d'ajouter successivement 1/14 et 1/3 :

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}) + \frac{1}{14} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{14} + \frac{1}{14}) + \frac{1}{42} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{7} + \frac{1}{42}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6},$$

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) + \frac{1}{3} = 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = 1 + 1 = 2,$$

Pour les *doublements éventuels*, en utilisant les *décompositions de type « multiple de trois »* et les *décompositions de type « multiple de sept »*, nous obtenons des expressions de 4/67 et de 8/67 qui sont respectivement en quatre et six quantièmes :

$$\frac{1}{67}\times 4=(\frac{1}{67}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{42}+\frac{1}{201}+\frac{1}{938})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 21}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 67}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 469}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{21}+\frac{1}{134}+\frac{1}{402}+\frac{1}{469}\ ;$$

$$\frac{1}{67}\times 8=(\frac{1}{67}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{21}+\frac{1}{134}+\frac{1}{402}+\frac{1}{469})\otimes 2=$$
$$=(\frac{1}{21}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 67}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 201}\otimes 2)+(\frac{1}{7\times 67}\otimes 2)=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{67}+\frac{1}{201}+\frac{1}{268}+\frac{1}{1876}.$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/61 et de 8/61 (rappelons que nous mettons en rouge les décompositions comportant des quantièmes plus petits que 1/1000 et que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

	(d_{67})	**(B_{67})**
4/67	**4**	4
8/67	5 **4**	**6**

EN GUISE DE CONCLUSION

Les expressions données par l'Auteur se situent dans une procédure assez traditionnelle. Lors de la division de 2 par 67, l'utilisation des *multiplicateurs binaires ou ternaires* ne permet pas d'aboutir. Le scribe doit avoir recours à d'autres multiplicateurs et le dixième est alors considéré. Il va sans dire que nous pouvons aussi évoquer des essais plus ou moins réfléchis avec la considération des *quantièmes décimaux* comme *quantième principal*. Nous avons vu qu'il existe une seule autre *décomposition égyptienne simple* de 2/67. Elle n'apporte pas de simplifications notables tant pour la division que pour les *doublements éventuels*.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 15.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. V-VI.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 85, 87, 91.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, p. 258.
Bruins, 1981_2, Reducible and Trivial Decompositions Concerning Egyptian Arithmetics, p. 282, 290.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 31.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. VI, pl. 21.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 57.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 129-130, 336.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 42, pl. VI.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 149.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, pp. 64-65.
Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 295.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 105.

Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 100, 104.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 44, pl. C.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{33}, p. 89.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 6.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, pp. 331, 334.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363, 376.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 125.