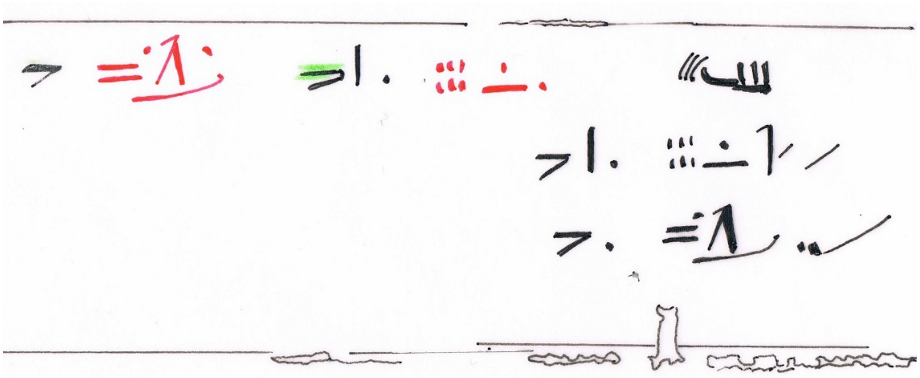
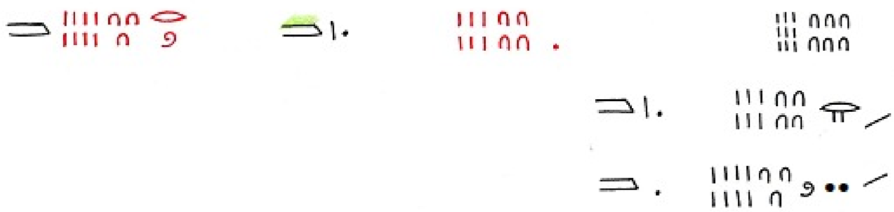
Expressions de 2 à partir de 69

Nous pouvons noter deux « manques » au texte écrit par Âhmès. Tout d'abord, comme le souligne Francis Griffith, à la première ligne, le premier signe du demi est incomplet : « *the upper half of the*  *must have been written on a straw accidentally struck to the papyrus, for it has quite disappeared, and there is no appearance of any damage* [1]». Ensuite, une brisure affecte le sommet du dernier signe du demi. Elle est plus importante dans les premières reproductions que dans les dernières.

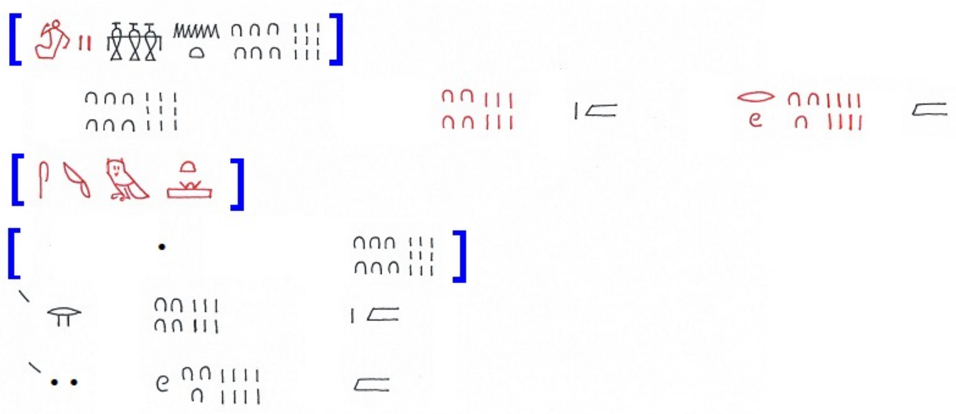
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



[1] Griffith, 1894, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 207.

TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1	69 · **46** · 1 2’ **138’** 2’
L_2	\ 3’’ 46 · 1 2’
L_3	\ 2 138 · 2’

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1	69 · **46*** · 1 2’ **138’** 2’
L_2	\ 3’’ 46 · 1 2’
L_3	\ 2 138 · 2’

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1	69 · **46_1*** · 1 2’ [1] **138’** 2’
L_2	\ 3’’ 46_1 · 1 2’
L_3	\ 2_1 138 · 2’

1 — Seule la partie inférieure du signe du demi a été conservée. Voir l’introduction à cet exercice.

Traduction

$//_1$		69		**46***	1 2’	**138’**	2’
$//_2$	\ 3’’	46	1 2’				
$//_3$	\ 2	138	2’				

ADAPTATION

[Exprime 2 à partir de 69**]**

69	**1/46**	1 1/2	**1/138**	1/2	

[Calcul]

	[1	69**]**
\ 2/3	46	1 1/2
\ 2	138	1/2

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 69

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 69* sont :

$$\boxed{\textbf{(d}_{69}\textbf{)}\quad \frac{2}{69}=\frac{1}{46}+\frac{1}{138} \quad \text{et} \quad \textbf{(2}_{69}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}.}$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant **(2₂₃)** et **(2₆₉)**, nous obtenons des décompositions de 4/69 et de 8/69 qui sont ainsi respectivement en deux et trois quantièmes :

$$\frac{1}{69}\times 4=(\frac{1}{69}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{46}+\frac{1}{138})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 23}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 69}\otimes 2)=\frac{1}{23}+\frac{1}{69},$$

$$\frac{1}{69}\times 8=(\frac{1}{69}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{23}+\frac{1}{69})\otimes 2=(\frac{1}{23}\otimes 2)+(\frac{1}{69}\otimes 2)=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}+\frac{1}{46}+\frac{1}{138}=$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{46}+(\frac{1}{2\times 69}+\frac{1}{4\times 69})=\frac{1}{12}+\frac{1}{46}+\frac{1}{92}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 69

Les calculs écrits par Âhmès et la *décomposition de deux* **(2₆₉)** montrent que les expressions données par l'Auteur peuvent être rangées dans le cadre général des *décompositions de type « multiple de trois »*. Nous proposons la division suivante :

1	69	(initialisation)
2/3	46	(« table de deux-tiers »)
\ 1/46	1 1/2	(inversion)
Manque	1/2	**(2₆₉)**
\ 1/138	1/2	(inversion-multiplication)

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/69

Le nombre 69 étant le produit de deux nombres premiers distincts, à savoir 3 et 23, il existe deux autres *décompositions* de 2/69 en deux quantièmes différents supérieurs à 1/1000 :

$$\textbf{(A}_{69}\textbf{)}\quad \frac{2}{69}=\frac{1}{36}+\frac{1}{828} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6})+\frac{1}{12}\ ;$$

$$\textbf{(B}_{63}\textbf{)}\quad \frac{2}{69}=\frac{1}{39}+\frac{1}{299} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{78}+\frac{1}{156})+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{91}.$$

Il n'existe pas de *décomposition égyptienne simple* de 2/69 en trois quantièmes.

Théoriquement, la décomposition

$$\textbf{(A}_{69}\textbf{)}\quad \frac{2}{69}=\frac{1}{36}+\frac{1}{828},$$

se déduit de la décomposition

$$\textbf{(d}_{23}\textbf{)} \quad \frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276},$$

qui résulte des expressions données par l'Auteur en R2/23. En effet, d'après **(d_{23})**, nous pouvons écrire :

$$\frac{2}{63} = \frac{2}{23\times 3} = \frac{2}{23}\times\frac{1}{3} = (\frac{1}{12}+\frac{1}{276})\times\frac{1}{3} = \frac{1}{12\times 3}+\frac{1}{276\times 3} = \frac{1}{36}+\frac{1}{828}.$$

Nous en déduisons la même *décomposition de deux*, à savoir,

$$\textbf{(2}_{23}\textbf{)} \quad 2 = (1+\frac{2}{3}+\frac{1}{4})+\frac{1}{12},$$

et la procédure des « multiples de vingt-trois » pour diviser 2 par 63 :

1	69	(initialisation)
2/3	46	(« table de deux-tiers »)
1/3	23	(dédoublement)
2/3 de 1/3	15 1/3	(« table de deux-tiers »)
\ 1/3 de 1/3	7 2/3	(dédoublement)
1/9	7 2/3	(simplification)
1/18	3 1/2 1/3	(dédoublement)
\ 1/36	1 1/2 1/4 1/6	(dédoublement)
Manque	1/12	
\ 1/828	1/12	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels* nous avons :

$$\frac{1}{69}\times 4 = (\frac{1}{69}\otimes 2)\otimes 2 = (\frac{1}{36}+\frac{1}{828})\otimes 2 = (\frac{1}{2\times 18}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 414}\otimes 2) = \frac{1}{18}+\frac{1}{414},$$

$$\frac{1}{69}\times 8 = (\frac{1}{69}\times 4)\otimes 2 = (\frac{1}{18}+\frac{1}{414})\otimes 2 = (\frac{1}{2\times 9}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 212}\otimes 2) = \frac{1}{9}+\frac{1}{212}.$$

La *décomposition composée*

$$\textbf{(B}_{63}\textbf{)} \quad \frac{2}{69} = \frac{2}{3\times 23} = \frac{2}{3\times(3+23)}+\frac{2}{23\times(3+23)} = \frac{1}{3\times 13}+\frac{1}{23\times 13} = \frac{1}{39}+\frac{1}{299}$$

donne lieu, d'une part, à des quantièmes sous-multiples de 1/13 et, d'autre part, à une *décomposition de deux* assez complexe

$$2 = (1+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{78}+\frac{1}{156})+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{91}.$$

Quant aux *doublements éventuels*, en utilisant R2/39 et la *décomposition composée* de 2/69 ainsi qu'une réduction qui était sans doute inconnue des scribes égyptiens, nous avons :

$$\frac{1}{69}\times 4 = (\frac{1}{69}\otimes 2)\otimes 2 = (\frac{1}{39}+\frac{1}{299})\otimes 2 = (\frac{1}{39}\otimes 2)+(\frac{1}{13\times 23}\otimes 2) = \frac{1}{26}+\frac{1}{78}+\frac{1}{234}+\frac{1}{414} =$$
$$= (\frac{1}{26}+\frac{1}{78}+\frac{1}{234})+\frac{1}{414} = \frac{1}{18}+\frac{1}{414},$$

qui est l'expression précédemment obtenue, ce qui réduit encore l'intérêt de cette *décomposition composée*.

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/69 et de 8/69 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

	(d_{69})	**(A_{69})**	**(B_{69})**
4/69	2	2	4 **<u>2</u>**
8/69	4 **<u>3</u>**	2	2

EN GUISE DE CONCLUSION

Une fois de plus, nous pouvons hésiter entre l'obtention aisée des résultats à partir de la procédure utilisée pour les « multiples de trois » et l'expression

$$\textbf{(A}_{69}\textbf{)} \quad \frac{2}{69} = \frac{1}{36} + \frac{1}{828},$$

qui donne lieu à des sous-multiples du quantième 1/4 très utiles pour des *doublements éventuels*. Toutefois, l'obtention de cette dernière décomposition exige, dans la division de 2 par 69, l'introduction, par deux fois, du *multiplicateur deux-tiers*, ce qui en restreint la portée.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, p. 3.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. V.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 57.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. VI, pl. 21.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 31.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 130, 336.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 42, pl. VI.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, pp. 149-150.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 65.
Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 207.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 100, 102.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 45, pl. C.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{34}, p. 89.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 6.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 335.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arihmetik*, p. 125.