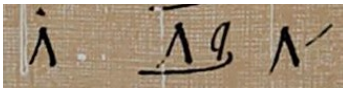
Expressions de 2 à partir de 71

Transcrire est toujours un exercice délicat. Ici, à la fin de la dernière ligne, le signe du dixième est précédé d'un point. Toutes les reproductions photographiques en témoignent.

Chace[1]

Robins, Shute[2]

Site BM



Fac-similé[3]

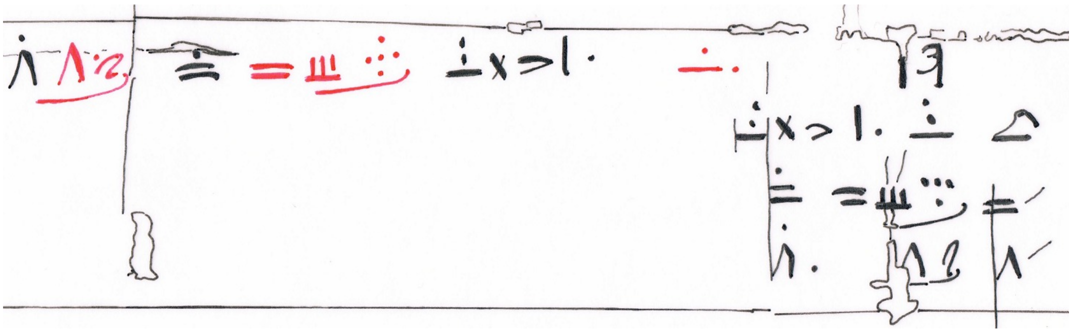
Eisenlohr[4]

Griffith[5]

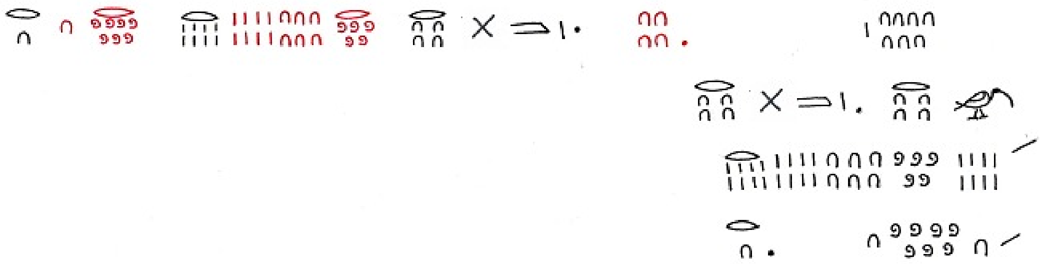
Toutefois, l'auteur du *Fac-similé* ignore ce point tandis qu'August Eisenlohr le place tout de suite après le *quantième secondaire* qui le précède. Francis Griffith indique la correction que l'on doit apporter : « *the spot is incorrectly placed in the* facsimile [6]». Il semble qu'il ait confondu les deux publications et que, peut-être, le point ait été dans une brisure lorsque la reproduction du *Fac-similé* a été effectuée. Pour expliquer la transcription d'Eisenlohr, à savoir, l'ajout du point, mais son mauvais positionnement, on peut émettre l'hypothèse de l'observation du document par un tiers. Rappelons que, dans ses traductions, Eisenlohr omet les points de séparation.

[1] Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. VI.
[2] Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 6.
[3] British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. V.
[4] Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, pl. VI.
[5] Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, pl. 2.
[6] Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 208.

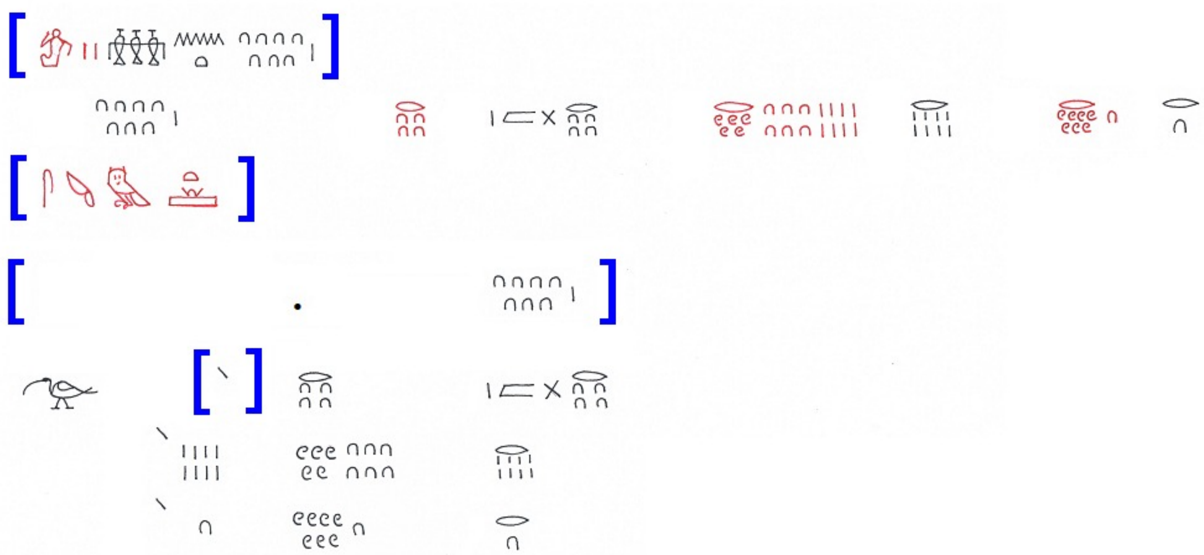
TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L1	*71 · **40** · 1 2’ 4’ 40’ **568’** 8’ **710’** 10’*
L2	*gm 40’ · 1 2’ 4’ 40’*
L3	*\ 8 568 8’*
L4	*\ 10 710 · 10’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L1	*71 · **40*** · 1 2’ 4’ 40’ **568’** 8’ **710’** 10’*
L2	*gèm 40’ · 1 2’ 4’ 40’*
L3	*\ 8 568 8’*
L4	*\ 10 710 · 10’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L1	71 · **40*** · 1 2’ 4’ 40’ **568’** 8’ **710’** 10’
L2	gèm$_1$ 40’ · 1 2’ 4’ 40’
L3	\ 8 568 8’
L4	\ 10 710 · 10’

Traduction

//1	71		**40***	1 2’ 4’ 40’	**568’**	8’	**710’**	10’
//2	Vérifie !		40’	1 2’ 4’ 40’				
//3		\ 8	568	8’				
//4		\ 10	710	10’				

ADAPTATION

[Exprime 2 à partir de 71**]**

71	**1/40**	1 1/2 1/4 1/40	**1/568**	1/8	**1/710**	1/10

[Calcul]

		[1	71]
Vérifie !	[\]	1/40	1 1/2 1/4 1/40
	\ 8	568	1/8
	\ 10	710	1/10

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 71

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 71* sont :

$$\textbf{(d}_{71}\textbf{)}\quad \frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_{71}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{40})+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}.$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant une *décomposition de type « multiple de cinq »*, nous obtenons des expressions qui sont respectivement, pour 4/71 et 8/71, en trois et quatre quantièmes :

$$\frac{1}{71}\times 4=(\frac{1}{71}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 20}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 284}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 355}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{284}+\frac{1}{355}\ ;$$

$$\frac{1}{71}\times 8=(\frac{1}{71}\times 4)\otimes 2==(\frac{1}{20}+\frac{1}{284}+\frac{1}{355})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 10}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 142}\otimes 2)+(\frac{1}{5\times 71}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{142}+\frac{1}{213}+\frac{1}{1065}.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 71

La considération du *quantième principal* 1/40 laisse la porte ouverte à diverses possibilités. En effet, nous devons considérer deux *dédoublements* et une *division par dix*. L'ordre de ces trois opérations peut influer sur le résultat obtenu. Ainsi, nous pouvons effectuer la *division par dix* au début et procéder alors comme suit :

1	71	(initialisation)
1/10	7 1/10	(division par dix)
1/20	3 1/2 1/20	(dédoublement)
\ 1/40	1 1/2 1/4 1/40	(dédoublement)
Manque	1/8 1/10	**(2$_{71}$)**
\ 1/568	1/8	(inversion-multiplication)
\ 1/710	1/10	(inversion-multiplication)

Contrairement à ce qui a lieu pour l'exercice R2/67, ici, nous obtenons facilement l'*expression secondaire principale* et la division par dix est simple. En revanche, nous pouvons envisager de commencer par les dédoublements, ce qui paraît, ici, moins naturel et plus compliqué. En effet, en utilisant la *table de dixièmes*, nous pouvons avoir :

1	71	(initialisation)
1/2	35 1/2	(dédoublement)
1/4	17 1/2 1/4	(dédoublement)
1/10 de 1/4	1 2/3 1/30 1/20 1/40	(*table de dixièmes*)
1/40	1 2/3 1/12 1/40	(multiplication-simplification)

Mais, en divisant directement par dix, nous pouvons avoir :

1	71	(initialisation)
1/2	35 1/2	(dédoublement)
1/4	17 1/2 1/4	(dédoublement)
1/10 de 1/4	1 1/2 1/5 1/20 1/40	(division par dix)
1/40	1 1/2 1/4 1/40	(multiplication-simplification)

Dans les deux cas, nous devons effectuer des réductions.

VÉRIFICATION

Théoriquement, l'*expression secondaire principale* peut être considérée comme étant le résultat de la division de 71 par 40. Selon la procédure employée, elle peut donc avoir diverses formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* où les quantièmes de cette expression sont des multiples du *quantième principal*, nous pouvons distinguer les trois décompositions suivantes :

$$Q = \frac{71}{40} = 1 + \frac{31}{40} =$$

$$= 1 + \frac{20+10+1}{40} = 1 + \frac{20}{40} + \frac{10}{40} + \frac{1}{40} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{40}\ ;$$

$$= 1 + \frac{20+8+2+1}{40} = 1 + \frac{20}{40} + \frac{8}{40} + \frac{2}{40} + \frac{1}{40} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}\ ;$$

$$= 1 + \frac{20+5+4+2}{40} = 1 + \frac{20}{40} + \frac{5}{40} + \frac{4}{40} + \frac{2}{40} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}.$$

La première décomposition correspond à l'*expression secondaire* donnée par l'Auteur. Nous pouvons proposer la vérification suivante :

\ 1	40	(initialisation)
\ 1/2	20	(dédoublement)
\ 1/4	10	(dédoublement)
Manque	1	
\ 1/40	1	(inversion)
Total	71	

OBTENTION DU MANQUE

D'un point de vue théorique, nous avons les deux décompositions suivantes :

$$M = 2 - 71 \times \frac{1}{40} = 2 - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{40}) == 2 - \frac{71}{40} = \frac{80-71}{40} = \frac{9}{40} =$$

$$= \frac{8+1}{40} = \frac{8}{40} + \frac{1}{40} = \frac{1}{5} + \frac{1}{40} \;;$$

$$= \frac{5+4}{40} = \frac{5}{40} + \frac{4}{40} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10}.$$

Bien entendu, la deuxième décomposition est la plus utile. Elle correspond aux expressions données par l'Auteur.

Si nous voulons procéder par soustraction et utiliser le *procédé des auxiliaires numériques*, nous pouvons choisir le nombre 40 comme *référent commun* et diviser alors 9 par 40. Pour parvenir à l'expression donnée par l'Auteur, il suffit de commencer par des *dédoublements* :

	1	40	(initialisation)
	1/2	20	(dédoublement)
	1/4	10	(dédoublement)
\	1/8	5	(dédoublement)
\	1/10	4	(inversion de la troisième ligne)

Si, maintenant, nous voulons utiliser diverses relations, nous pouvons procéder comme suit. Le dernier quantième, 1/40, figure dans une seule réduction :

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40},$$

réduction qui se trouve dans le *Rouleau de cuir*. Par suite, on ajoute 1/10 qui est ainsi un élément du *manque partiel*, d'où :

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{40}) + \frac{1}{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + (\frac{1}{10} + \frac{1}{40}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Il manque encore 1/8, d'où le *manque* total : 1/8 1/10.

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/71

Le nombre 71 étant premier, il existe une seule *décomposition de 2/71 en deux quantièmes distincts* :

$$\textbf{(A}_{71}\textbf{)} \quad \frac{2}{71} = \frac{1}{36} + \frac{1}{2556}.$$

Il existe une autre *décomposition égyptienne simple* de 2/71 en trois quantièmes :

$$\textbf{(B}_{71}\textbf{)} \quad \frac{2}{71} = \frac{1}{42} + \frac{1}{426} + \frac{1}{497} \quad \text{avec} \quad 2 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{42}) + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}.$$

Il n'existe pas de *décomposition égyptienne simple* de 2/71 en quatre quantièmes.

La *décomposition primaire*

$$\textbf{(A}_{71}\textbf{)}\quad \frac{2}{71}=\frac{2}{71+1}+\frac{2}{71\times(71+1)}=\frac{2}{72}+\frac{2}{71\times 72}=\frac{1}{36}+\frac{1}{71\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{2556}$$

est composée de deux quantièmes sous-multiples de 1/4, donc très utiles pour les *doublements éventuels* qui sont exprimés, eux aussi, en deux quantièmes :

$$\frac{1}{71}\times 4=(\frac{1}{71}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{36}+\frac{1}{2556})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 18}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 1278}\otimes 2)=\frac{1}{18}+\frac{1}{1278},$$

$$\frac{1}{71}\times 8=(\frac{1}{71}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{18}+\frac{1}{1278})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 9}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 639}\otimes 2)=\frac{1}{9}+\frac{1}{639}.$$

Mais le dernier quantième de la décomposition **(A$_{71}$)** est très petit : il est égal à 1/2556.

Le *quantième principal* de l'autre *décomposition égyptienne simple* de 2/71 en trois quantièmes

$$\textbf{(B}_{71}\textbf{)}\quad \frac{2}{67}=\frac{1}{42}+\frac{1}{428}+\frac{1}{497}\quad \text{avec}\quad 2+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{42})+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}.$$

étant égal à 1/42, nous pouvons parvenir à ce nombre en commençant la division de 2 par 71 à l'aide de dédoublements et des multiplicateurs 2/3 et 1/7. Nous proposons de débuter comme suit

1	71	(initialisation)
1/7	10 1/7	(« division par sept »)
2/3 de 1/7	6 2/3 1/14 1/42	(« table de deux-tiers »)
1/3 de 1/7	3 1/3 1/21	(dédoublement et simplification)
1/21	3 1/3 1/21	(multiplication-simplification)
\ 1/42	1 1/2 1/6 1/42	(dédoublement)

Quant à l'obtention du *manque* il suffit d'ajouter successivement 1/7 et 1/6 :

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{42})+\frac{1}{7}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+(\frac{1}{7}+\frac{1}{42})=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{6})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},$$

$$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+\frac{1}{6}=1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=1+1=2.$$

Pour les *doublements éventuels*, en utilisant les « multiple de trois » et les « multiples de sept », nous obtenons des expressions de 4/71 et de 8/71 qui sont, respectivement, en quatre et cinq quantièmes :

$$\frac{1}{71}\times 4=(\frac{1}{71}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{42}+\frac{1}{426}+\frac{1}{497})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 21}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 213}\otimes 2)+(\frac{1}{7\times 71}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{21}+\frac{1}{213}+\frac{1}{284}+\frac{1}{1988};$$

$$\frac{1}{71}\times 8 = (\frac{1}{71}\times 4)\otimes 2 = (\frac{1}{21}+\frac{1}{213}+\frac{1}{284}+\frac{1}{1988})\otimes 2 =$$

$$= (\frac{1}{21}\otimes 2) + (\frac{1}{3\times 71}\otimes 2) + (\frac{1}{2\times 142}\otimes 2) + (\frac{1}{2\times 994}\otimes 2) = \frac{1}{14}+\frac{1}{42}+(\frac{1}{142}+\frac{1}{142})+\frac{1}{426}+\frac{1}{994} =$$

$$= \frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{71}+\frac{1}{426}+\frac{1}{994}.$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/71 et de 8/71 (rappelons que nous mettons en rouge les décompositions comportant des quantièmes plus petits que 1/1000) :

	(d_{71})	**(B_{71})**
4/71	3	**4**
8/71	**4**	5

EN GUISE DE CONCLUSION

Les expressions données par l'Auteur se situent dans une procédure assez traditionnelle. Lors de la division de 2 par 71, l'utilisation des *multiplicateurs binaires ou ternaires* ne permet pas d'aboutir. Le scribe doit avoir recours à d'autres multiplicateurs et le dixième est alors considéré. Il va sans dire que nous pouvons aussi évoquer des essais plus ou moins réfléchis avec la considération des *quantièmes décimaux* comme *quantième principal*. Nous avons vu qu'il existe une seule autre *décomposition égyptienne simple* de 2/71. Elle n'apporte pas de simplifications notables tant pour la division que pour les *doublements éventuels*.

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 15.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. V-VI.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 85, 91.
Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, p. 258.
Bruins, 1981_2, Reducible and Trivial Decompositions Concerning Egyptian Arithmetics, p. 290.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 31.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. VI, pl. 22.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 57.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 130, 336.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 43, pl. VI.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 150.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 65.
Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 295.
Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 208, pl. VI.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 105, 108-109.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 137, 140, 166.
Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 100, 104.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 45, pl. C.

Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{35}, p. 89.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 6.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, pp. 331, 333-334.
Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363, 376-377, 382.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arihmetik*, p. 125.