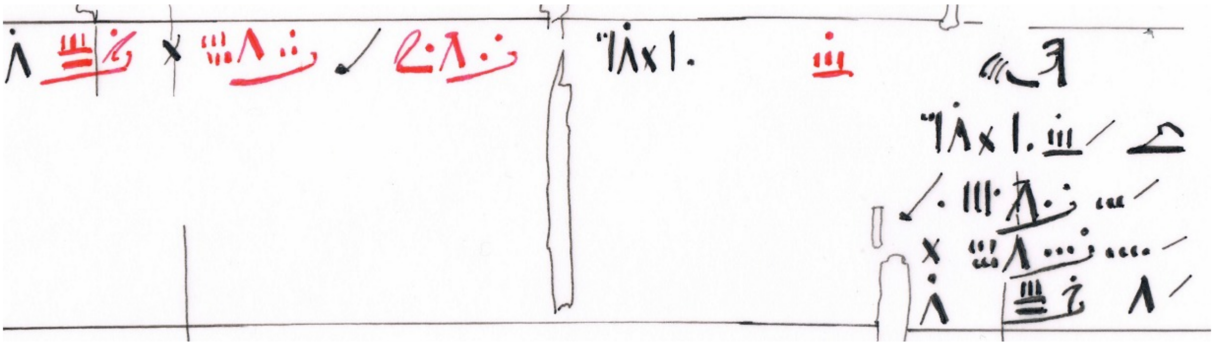
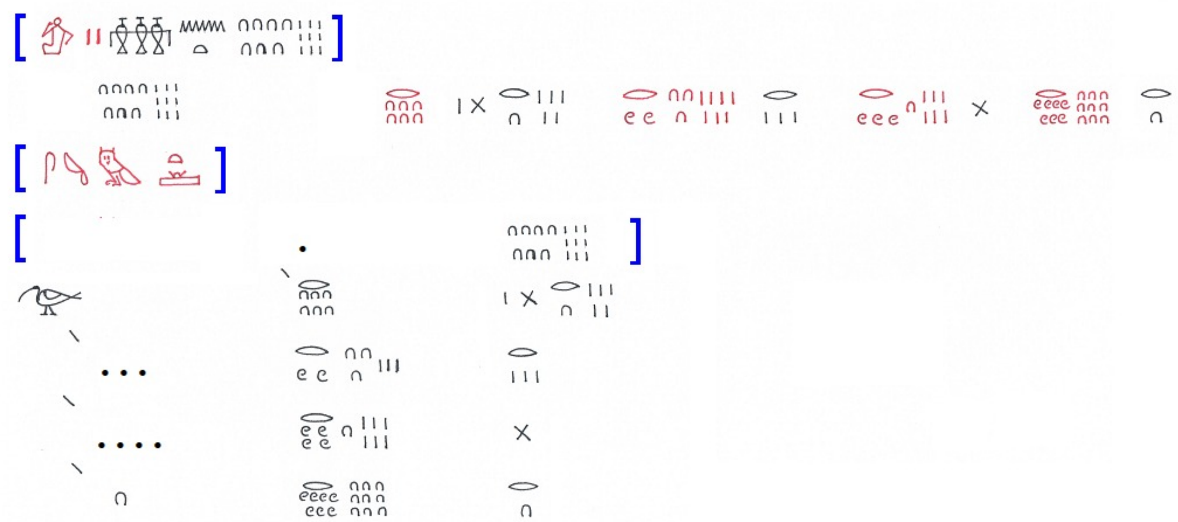
Expressions de 2 à partir de 79

TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE

TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1	*79 60’ · 1 4’ 15’ 237’ 3’ 316’ 4’ 790’ 10’*
L_2	*gm \ 60 ·1 4’ 15’*
L_3	*\ 3 233’ · 3’*
L_4	*\ 4 416’ 4’*
L_5	*\ 10 790’ 10’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1	*79 60’ · 1 4’ 15’ 237’ 3’ 316’ 4’ 790’ 10’*
L_2	*gèm \ 60’ · 1 4’ 15’*
L_3	*\ 3 233’ · 3’*
L_4	*\ 4 416’ 4’*
L_5	*\ 10 790’ 10’*

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1	79 **60’** · 1 4’ 15’ **237’**[1] 3’ **316’** 4’ **790’** 10’
L_2	gèm$_1$ \ 60’ · 1 4’ 15’
L_3	\ 3_1 233’[2] · 3’
L_4	\ 4_1 416’[3] 4’
L_5	\ 10 790’ 10’

1 — L’auteur du *Fac-similé*[1] et par suite Eisenlohr[2] omettent le point indiquant le chiffre 30. Griffith a proposé de le restituer[3].

2 — Âhmès a peut-être mal recopié en écrivant 233’ au lieu de 237’.

3 — Âhmès a peut-être mal recopié en écrivant 416’ au lieu de 316’.

[1] British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. VI.
[2] Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, pl. VII.
[3] Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, pl. 2.

Traduction

//$_1$	79	**60’**	1 4’ 15’	**237’**	3’	**316’**	4’	**790’**	10’
//$_2$	Vérifie !	\ 60’	1 4’ 15’						
//$_3$		\ 3	233’*	3’					
//$_4$		\ 4	416’*	4’					
//$_5$		\ 10	790’	10’					

ADAPTATION

[**Exprime 2** à partir de 79]

	79	**1/60**	1 1/4 1/15	**1/237**	1/3	**1/316**	1/4	**1/790**	1/10

[**Calcul**]

		[1	79]
Vérifie !	\	1/60	1 1/4 1/15
	\ 3	1/237	1/3
	\ 4	1/316	1/4
	\ 10	1/790	1/10

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 79

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 79* sont :

$$\textbf{(d}_{79}\textbf{)}\quad \frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2}_{79}\textbf{)}\quad 2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{15})+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\,.$$

Pour exprimer les *doublements éventuels*, en utilisant **(d_{79})**, une *décomposition de type « multiple de trois »* et une *décomposition de type « multiple de cinq »*, nous obtenons des expressions qui sont, pour 4/79 et 8/79, respectivement, en quatre et six (après simplifications) ou huit quantièmes :

$$\frac{1}{79}\times 4=(\frac{1}{79}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790})\otimes 2=$$
$$=(\frac{1}{2\times 30}\otimes 2)+(\frac{1}{3\times 79}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 158}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 395}\otimes 2)=$$
$$\frac{1}{30}+(\frac{1}{158}+\frac{1}{158})+\frac{1}{474}+\frac{1}{395}==\frac{1}{30}+\frac{1}{79}+\frac{1}{395}+\frac{1}{474}\;;$$

$$\frac{1}{79}\times 8=(\frac{1}{79}\times 4)\otimes 2=$$
$$=(\frac{1}{30}+\frac{1}{79}+\frac{1}{395}+\frac{1}{474})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 15}\otimes 2)+(\frac{1}{79}\otimes 2)+(\frac{1}{5\times 79}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 237}\otimes 2)=$$
$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{60}+(\frac{1}{237}+\frac{1}{237}+\frac{1}{237})+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}+\frac{1}{1185}=\frac{1}{15}+\frac{1}{60}+\frac{1}{79}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}+\frac{1}{1185}\,.$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 79

Théoriquement, aujourd'hui, nous pouvons noter que le nombre 60, inverse du *quantième principal*, admet comme diviseurs premiers, les nombres 2, 3 et 5 :

$$60=2^2\times 3\times 5\,.$$

Pratiquement, nous en déduisons que les doublements, le deux-tiers et la division par dix sont les outils essentiels pour diviser 2 par 79 afin d'aboutir à la considération de ce *quantième principal*. Comme dans les exercices précédents, nous examinons diverses possibilités selon le rang que l'on attribue à la division par dix.

Nous pouvons commencer par le multiplicateur deux-tiers et finir par la division par dix :

1	79	(initialisation)
2/3	52 2/3	(« table de deux-tiers »)
1/3	26 1/3	(dédoublement)
1/6	13 1/6	(dédoublement)
1/60	1 1/5 1/10 1/60	(division par dix)

Nous sommes obligés d'employer certaines réductions pour parvenir au résultat de l'Auteur. Par exemple, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{60}=\frac{1}{5}+(\frac{1}{20}+\frac{1}{20})+\frac{1}{60}=(\frac{1}{5}+\frac{1}{20})+(\frac{1}{20}+\frac{1}{60})=\frac{1}{4}+\frac{1}{15},$$

ce qui semble assez artificiel.

Au contraire, nous pouvons commencer avec la division par dix :

1	79	(initialisation)
1/10	7 2/3 1/5 1/30	(« division par dix »)
2/3 de 1/10	5 1/9 1/10 1/30 1/45	(« table de deux-tiers » et R61B)
2/3 de 1/10	5 1/6 1/10	(réduction de 1/30 1/45 en 1/18 et de 1/9 1/18 en 1/6)
1/3 de 1/10	2 1/12 1/20	(dédoublement)
1/30	2 1/2 1/12 1/20	(multiplication-simplification)
1/60	1 1/4 1/24 1/40	(dédoublement)

Nous sommes obligés d'employer certaines réductions pour parvenir au résultat de l'Auteur. D'une part, nous pouvons simplifier comme suit le résultat relatif au deux-tiers du dixième :

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}=\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+(\frac{1}{30}+\frac{1}{45})=\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{18}=\frac{1}{5}+(\frac{1}{9}+\frac{1}{18})+\frac{1}{10}=$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10},$$

ce qui semble assez artificiel. D'autre part, nous pouvons indiquer la simplification suivante

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{40}=\frac{1}{15},$$

qui n'est pas classique.

Enfin, nous pouvons diviser par dix en milieu de parcours. C'est la solution que nous avons retenue, d'où la division suivante :

1	79	(initialisation)
2/3	52 2/3	(« table de deux-tiers »)
1/3	26 1/3	(dédoublement)
1/10 de 1/3	2 1/2 1/10 1/30	(division par dix)
1/30	2 1/2 1/10 1/30	(multiplication-simplification)
1/60	1 1/4 1/15	(dédoublement et **(d_{15})**)
Manque	1/3 1/4 1/10	**(2_{79})**
\ 1/237	1/3	(inversion-multiplication)
\ 1/316	1/4	(inversion-multiplication)
\ 1/790	1/10	(inversion-multiplication)

Ces solutions montrent bien, si besoin était, toutes les difficultés que nous rencontrons pour essayer de parvenir le mieux possible aux résultats donnés par l'Auteur. En fait, la *division par dix* donne des résultats plus ou moins complexes et nous devons effectuer cette opération au moment le plus opportun. De plus, ici, nous avons mis en évidence l'utilité des expressions des doublements de quantièmes lorsqu'il s'agit d'effectuer des *dédoublements* de ces expressions. Dans le cas présent, de

$$\frac{1}{15} \otimes 2 = \frac{1}{15} \times 2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{30},$$

nous déduisons le dédoublement suivant :

$$(\frac{1}{10} + \frac{1}{30}) \div 2 = (\frac{1}{10} + \frac{1}{30}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{15}.$$

VÉRIFICATION

Théoriquement, comme nous venons de le vérifier en utilisant diverses procédures pour diviser 2 par 79, l'*expression secondaire Q* relative au *quantième principal*, c'est-à-dire le résultat de la division de 79 par 60, peut avoir différentes formes. Si nous nous situons dans la perspective des *décompositions égyptiennes simples* nous pouvons avoir la seule décomposition *utile*

$$Q = \frac{79}{60} = 1 + \frac{19}{60} = 1 + \frac{15+4}{60} = 1 + \frac{15}{60} + \frac{4}{60} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{15},$$

qui correspond aux dires de l'Auteur. Pratiquement, le fait que le quart figure dans cette décomposition nous pousse à utiliser des dédoublements pour diviser 2 par 79.

\ 1	60	(initialisation)
1/2	30	(dédoublement)
\ 1/4	15	(dédoublement)
Manque	4	
\ 1/15	4	(inversion)
Total	79	

OBTENTION DU MANQUE

D'un point de vue théorique, nous avons les trois décompositions « utiles » suivantes :

$$M = 2 - 79 \times \frac{1}{60} = 2 - (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{15}) == 2 - \frac{79}{60} = \frac{120-79}{60} = \frac{41}{60} =$$

$$= \frac{30+10+1}{60} = \frac{30}{60} + \frac{10}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{60} \ ;$$

$$= \frac{30+6+5}{60} = \frac{30}{60} + \frac{6}{60} + \frac{5}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \ ;$$

$$= \frac{20+15+6}{60} = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{6}{60} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}.$$

La première décomposition doit être exclue car elle comporte le quantième 1/60 qui est trop petit. La dernière correspond aux expressions données par l'Auteur. C'est celle où le dernier quantième est le plus grand.

Si nous voulons procéder par soustraction et utiliser le *procédé des auxiliaires numériques*, nous pouvons choisir le nombre 60 pour *référent commun* et diviser alors 41 par 60. La nature particulière du diviseur, à savoir, le nombre 60, nous amène à envisager diverses pratiques opératoires. Nous pouvons commencer par utiliser les *dédoublements successifs* :

1	60	(initialisation)
\ 1/2	30	(dédoublement)
Manque	11	
\ 1/60	1	(inversion de l'initialisation)
\ 1/30	2	(doublement)
1/15	4	(doublement)
\ 1/10 1/30	8	(doublement et R2/15)

On obtient, après simplifications, la deuxième décomposition :

$$M = 41:60 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + (\frac{1}{30} + \frac{1}{30}) + \frac{1}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + (\frac{1}{15} + \frac{1}{60}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}.$$

L'utilisation des *multiplicateurs ternaires* peut conduire à la première décomposition que nous avons rejetée. Enfin, en considérant les *multiplicateurs décimaux* et en utilisant diverses simplifications nous pouvons obtenir la troisième décomposition :

1	60	(initialisation)
1/10	6	(division par 10)
\ 1/5	12	(doublement)
\ 1/3 1/15	24	(doublement et R2/5)
Manque	5	
1/60	1	(inversion de l'initialisation)
\ 1/30	2	(doublement)
1/10	6	(division par dix)
\ 1/20	3	(dédoublement)

On obtient :

$$M = 41:60 = \frac{1}{3} + (\frac{1}{5} + \frac{1}{20}) + (\frac{1}{15} + \frac{1}{30}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}.$$

Nous pouvons aussi penser à une recherche s'apparentant à la recherche des multiplicateurs convenables d'où émergeront 1/3, 1/4 et 1/10 qui auraient été précédemment considérés :

1	60	(initialisation)
\ 1/3	20	(dédoublement du deux-tiers)
\ 1/4	15	(dédoublement de la moitié)

\ 1/10 6 (division par dix)

Si, maintenant, nous voulons utiliser diverses relations, nous pouvons procéder comme suit. L'établissement du *manque* s'effectue en trois temps. Le dernier quantième, 1/15, figure dans une seule réduction :

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15},$$

réduction qui ne « figure » pas dans le *Rouleau de cuir* mais que nous évoquons en R2/41 et R2/53. Par suite, on ajoute 1/10 qui est ainsi un premier élément du *manque partiel*, d'où :

$$(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{15})+\frac{1}{10}=1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}.$$

De la relation

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

nous déduisons qu'il faut ajouter 1/3 qui est ainsi un deuxième élément du *manque*, d'où :

$$(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6})+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

Finalement, il manque encore 1/4, d'où le *manque* total : 1/3 1/4 1/10.

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/79

Le nombre 79 étant premier, il existe une seule *décomposition de 2/79 en deux quantièmes distincts* :

$$\textbf{(A}_{79}\textbf{)}\quad \frac{2}{79}=\frac{1}{40}+\frac{1}{3160}.$$

Il n'existe pas de *décomposition égyptienne simple* de 2/79 en trois quantièmes.
Il existe une autre *décomposition égyptienne simple* de 2/79 en quatre quantièmes :

$$\textbf{(B}_{79}\textbf{)}\quad \frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{158}+\frac{1}{790}+\frac{1}{948}\qquad \text{avec}\qquad 2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{15})+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}.$$

La décomposition **(A$_{79}$)** est *primaire*

$$\textbf{(DP}_{79}\textbf{)}\quad \frac{2}{79}=\frac{2}{79+1}+\frac{2}{79\times(79+1)}=\frac{2}{80}+\frac{2}{79\times 80}=\frac{1}{40}+\frac{1}{79\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{3160}$$

$$\text{avec}\quad 2=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{40})+\frac{1}{40}.$$

Elle présente plusieurs avantages. D'une part, elle ne comporte que deux quantièmes. D'autre part, les quantièmes étant des sous-multiples de 1/8, les *doublements éventuels* sont immédiats :

$$\frac{1}{79}\times 4=(\frac{1}{79}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{40}+\frac{1}{3160})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 20}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 1580}\otimes 2)=\frac{1}{20}+\frac{1}{1580}\ ;$$

$$\frac{1}{80}\times 8=(\frac{1}{80}\times 4)\otimes 2=(\frac{1}{20}+\frac{1}{1580})\otimes 2=(\frac{1}{2\times 10}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 790}\otimes 2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{790}.$$

Toutefois, cette décomposition donne lieu à certaines difficultés pour obtenir l'*expression secondaire* relative au *quantième principal*. Par ailleurs, son dernier quantième, 1/3160, est très petit.

L'autre *décomposition égyptienne simple* de 2/79 en quatre quantièmes :

$$\textbf{(B}_{79}\textbf{)} \quad \frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{158}+\frac{1}{790}+\frac{1}{948}=\frac{1}{60}+\frac{1}{79\times 2}+\frac{1}{79\times 10}+\frac{1}{79\times 12}$$

$$\text{avec} \qquad 2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{15})+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12},$$

possède le même *quantième principal* que la décomposition que nous lisons dans le *Papyrus Rhind*. Le *manque* correspondant s'obtient moins facilement en ajoutant successivement 1/10, 1/12 et 1/2 :

$$(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{15})+\frac{1}{10}=1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3},$$

$$(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\frac{1}{12}=1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},$$

$$(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})+\frac{1}{2}=1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=1+1=2.$$

Quant aux *doublements éventuels*, nous retrouvons les mêmes expressions que précédemment mais de manière plus immédiate. En effet, pour le quadruple du quantième 1/79 nous avons :

$$\frac{1}{79}\times 4=(\frac{1}{79}\otimes 2)\otimes 2=(\frac{1}{60}+\frac{1}{158}+\frac{1}{790}+\frac{1}{948})\otimes 2=$$

$$=(\frac{1}{2\times 30}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 79}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 395}\otimes 2)+(\frac{1}{2\times 474}\otimes 2)=\frac{1}{30}+\frac{1}{79}+\frac{1}{395}+\frac{1}{474}.$$

En résumé, pour les *doublements éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantièmes figurant dans les expressions précitées de 4/79 et de 8/79 (rappelons que nous mettons en rouge les décompositions comportant des quantièmes plus petits que 1/1000 et que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

	(d$_{79}$)	**(A$_{79}$)**	**(B$_{79}$)**
4/79	4	**2**	4
8/79	8 <u>**6**</u>	2	8 <u>**6**</u>

EN GUISE DE CONCLUSION

Les expressions données par l'Auteur se situent dans une procédure assez traditionnelle. Lors de la division de 2 par 79, l'utilisation des *multiplicateurs binaires ou ternaires* ne permet pas d'aboutir. Le scribe doit avoir recours à d'autres multiplicateurs et le dixième est alors considéré. Toutefois, la procédure que nous retenons pour la division de 2 par 79 montre que la division par dix intervient en milieu de parcours ce qui peut souligner, si besoin était, les efforts déployés par les savants égyptiens à cette occasion. Il va sans dire que nous pouvons aussi évoquer des essais plus ou moins réfléchis avec la considération des *quantièmes décimaux* comme *quantième principal*. Nous avons vu qu'il existe une seule autre *décomposition égyptienne simple* de 2/79 :

$$\textbf{(B}_{79}\textbf{)} \quad \frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{158}+\frac{1}{790}+\frac{1}{948} \quad \text{avec} \quad 2=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{15})+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}.$$

Elle a le même *quantième principal* et elle n'apporte pas de simplifications notables tant pour la division que pour les *doublements éventuels*. L'expression du *manque* est même plus difficile à formuler. De plus, son dernier quantième est plus petit. Autrement dit, dans le contexte égyptien du calcul, l'Auteur semble avoir effectué le « meilleur choix ».

Bibliographie

Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing 2/*n* into fractions, pp. 3, 15.

British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. VI.

Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the 2/n table in the Rhind Papyrus, p. 450.

Bruins, 1952, Ancient Egyptian Arithmetic: 2/*N*, pp. 85, 87, 91.

Bruins, 1957, Platon et la table égyptienne 2/*n*, p. 258.

Bruins, 1981_2, Reducible and Trivial Decompositions Concerning Egyptian Arithmetics, pp. 289-290, 293.

Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 32.

Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. VI, pl. 26.

Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 58.

Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 131, 338.

Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 43, pl. VII.

Gillain, 1927, *La science égyptienne*, p. 152.

Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 66.

Gillings, 1974, The Recto of the Rhind Mathematical Papyrus, p. 296.

Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, pl. 2.

Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, pp. 103, 105.

Hultsch, 1901, Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, p. 183.

Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, pp. 138, 140, 166.

Loria, 1892, Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 100, 106.

Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 45, pl. C.

Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter,* I_{39}, p. 89.

Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 6-7.

Tannery, 1884, Questions héroniennes, pp. 331, 335.

Van der Waerden, 1938, Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung, pp. 363, 375-376.

Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, p. 25.

Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 126.

Wieleitner, 1927_1, War die Wissenschaft der alten Ägypter wirklich nur praktish? p. 24.