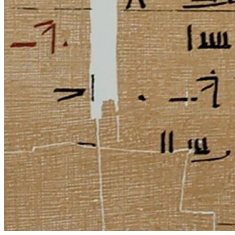
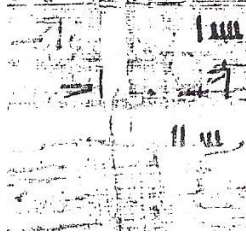


Expressions de 2 à partir de 81

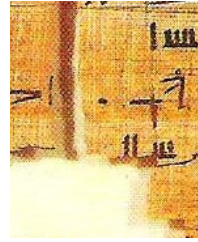
Nous pouvons être dans l'embarras pour définir la nature des manques qui peuvent avoir trait à l'exercice R2/81. En effet, les premières reproductions laissent voir une lacune verticale suivie d'un patch important qui couvre une partie du bas de la dernière ligne. Dans les documents plus récents, le patch est absent



Fac-similé¹



Chace²

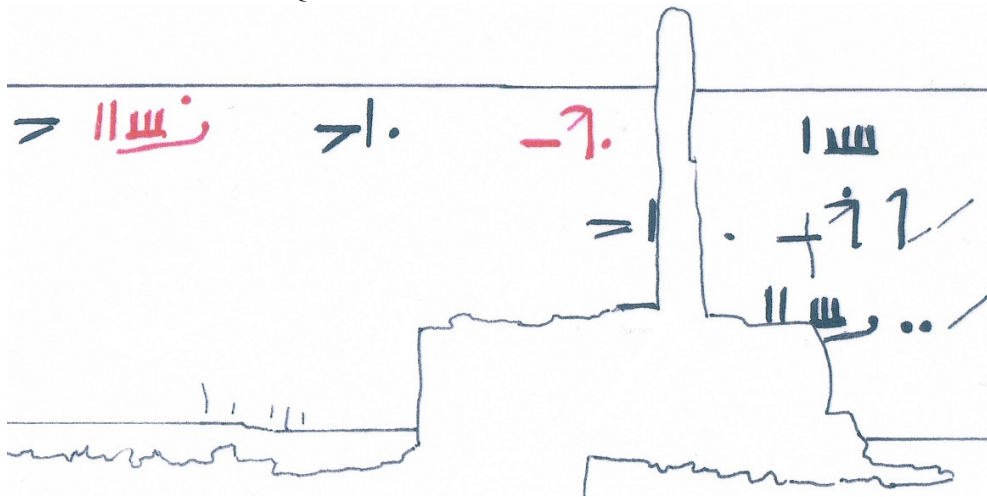


Robins, Shute³

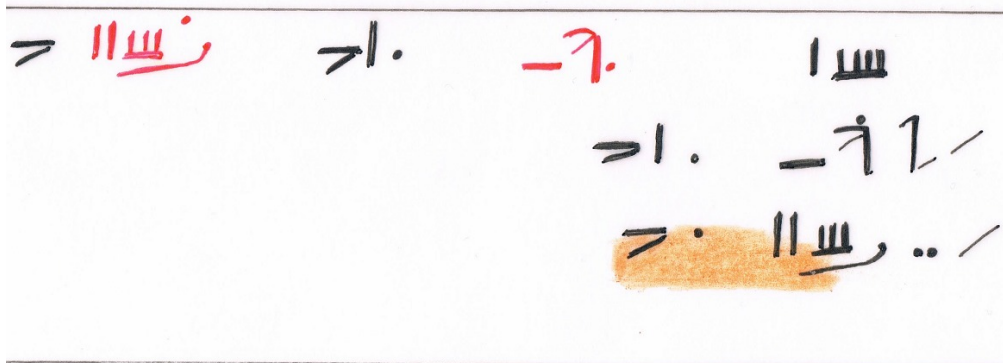


Site BM

TRANSCRIPTION HIÉRATIQUE



Restauration



¹ British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. VI.

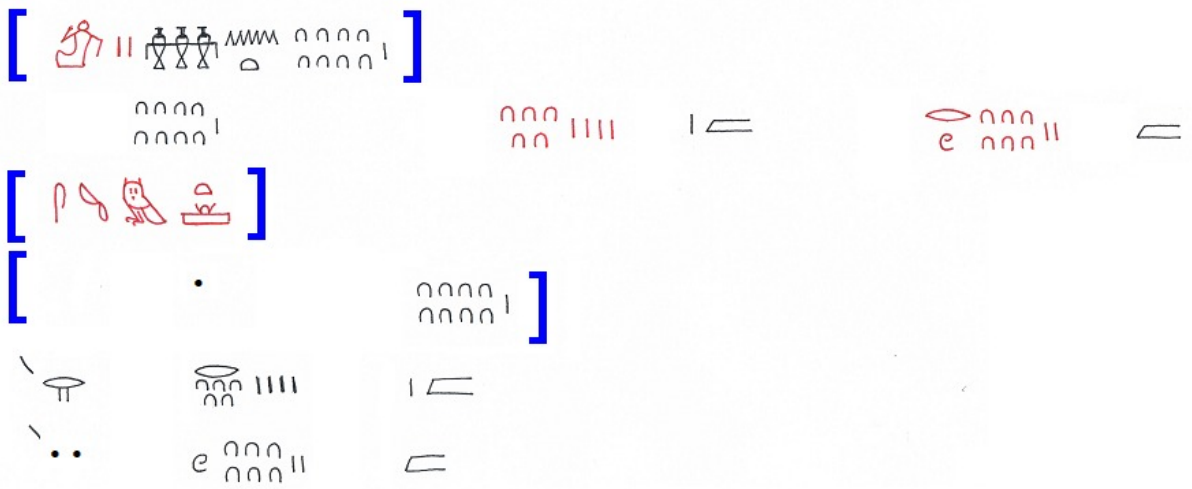
² Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. VI.

³ Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 6.

TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE



TRANSCRIPTION HIÉROGLYPHIQUE LIBRE



TRANSLITTÉRATION SAVANTE

L_1 81 **-54** · 1 2' **162'** 2'
 L_2 \ 3'' 54' · 1 2'
 L_3 \ 2 162 <· 2'>

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE

L_1 81 **-54*** · 1 2' **162'** 2'
 L_2 \ 3'' 54' · 1 2'
 L_3 \ 2 162 <· 2'>

TRANSLITTÉRATION VOCALISÉE INDEXÉE

L_1 81 **-54*** · 1 2' **162'** 2'
 L_2 \ 3'' 54' · 1 2'
 L_3 \ 2₁ 162 <·¹ 2'>

1 — On peut subodorer la présence d'un point.

Traduction littÉrale

// ₁		81		54*	1 2'		162'	2'
// ₂	\ 3''	54'			1 2'			
// ₃	\ 2	162			<2'>			

ADAPTATION

[Exprime 2 à partir de 81]								
		81		1/54*	1 1/2		1/162	1/2
[Calcul]								
			[1		81]			
	\ 2/3	54			1 1/2			
	\ 2	162			1/2			

EXPRESSIONS DE 2 À PARTIR DE 81

Les *expressions fondamentales de 2 à partir de 81* sont :

$$\boxed{\text{(d}_{81}) \quad \frac{2}{81} = \frac{1}{54} + \frac{1}{162} \quad \text{et} \quad \text{(2}_{81}) \quad 2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.}$$

Pour exprimer les *doublings éventuels*, en utilisant **(2₂₇)** et **(2₈₁)**, nous obtenons des décompositions de 4/81 et de 8/81 qui sont ainsi respectivement en deux et trois quantième(s) :

$$\frac{1}{81} \times 4 = \left(\frac{1}{81} \otimes 2\right) \otimes 2 = \left(\frac{1}{54} + \frac{1}{162}\right) \otimes 2 = \left(\frac{1}{2 \times 27} \otimes 2\right) + \left(\frac{1}{2 \times 81} \otimes 2\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{81},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{81} \times 8 &= \left(\frac{1}{81} \times 4\right) \otimes 2 = \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{81}\right) \otimes 2 = \left(\frac{1}{27} \otimes 2\right) + \left(\frac{1}{81} \otimes 2\right) = \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{54} + \frac{1}{162} = \\ &= \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{162}. \end{aligned}$$

DIVISION COMMENTÉE DE 2 PAR 81

Les calculs écrits par Âhmès et la *décomposition de deux (2₈₁)* montrent que les expressions données par l'Auteur peuvent être rangées dans le cadre général des *décompositions de type « multiple de trois »*. Nous proposons la division suivante :

1	81	(initialisation)
2/3	54	(« table de deux-tiers »)
\ 1/54	1 1/2	(inversion)
Manque	1/2	(2₈₁)
\ 1/162	1/2	(inversion-multiplication)

ÉTUDE DE QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE 2/81

Le nombre 81 est la puissance quatrième du nombre premier 3. On démontre que si p est un nombre premier impair quelconque et n un entier naturel non nul, il existe n et n seulement décompositions de $2/p$ en deux quantième(s) distincts⁴. Pour 2/81 nous avons les quatre décompositions suivantes :

$$\frac{2}{81} = \frac{1}{41} + \frac{1}{3321} = \frac{1}{42} + \frac{1}{1134} = \frac{1}{45} + \frac{1}{405} = \frac{1}{54} + \frac{1}{162}.$$

En dehors de la décomposition donnée par l'Auteur, seule la décomposition

$$\text{(A}_{81}) \quad \frac{2}{81} = \frac{1}{45} + \frac{1}{405} \quad \text{avec} \quad 2 = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}\right) + \frac{1}{5},$$

a tous ses quantième(s) supérieurs à 1/1000. Nous pouvons considérer que cette décomposition est simple en écrivant la décomposition de 2 sous la forme suivante :

⁴ Voir l'annexe E 6 : décompositions théoriques en deux quantième(s) distincts.

$$2 = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{45}\right) + \frac{1}{5}.$$

Il existe une seule *décomposition égyptienne simple* de $2/81$ en trois quantités :

$$(B_{81}) \quad \frac{2}{81} = \frac{1}{54} + \frac{1}{243} + \frac{1}{486} = \frac{1}{54} + \frac{1}{81 \times 3} + \frac{1}{81 \times 6} \quad \text{avec} \quad 2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Théoriquement, la décomposition

$$(A_{81}) \quad \frac{2}{81} = \frac{1}{45} + \frac{1}{405},$$

est une *décomposition de type « nombre carré »*⁵ :

$$(DPC_{81}) \quad \frac{2}{81} = \frac{2}{9 \times (9+1)} + \frac{2}{81 \times (9+1)} = \frac{2}{90} + \frac{2}{810} = \frac{1}{45} + \frac{1}{405}.$$

Nous pouvons parvenir à cette décomposition en opérant comme nous l'avons proposé pour la *décomposition primaire* relative au nombre 9 :

1	81	(initialisation)
1/9	9	(« table de carrés »)
1/10 de 1/9	2/3 1/5 1/30	(division par dix)
1/5 de 1/9	1 2/3 1/10 1/30	(doublement et simplification)
\ 1/45	1 2/3 1/10 1/30	(simplification)
Manque	1/5	
\ 1/405	1/5	(inversion-multiplication)

Quant aux *doublements éventuels*, nous avons, en utilisant, pour les calculs auxiliaires, la procédure relative aux *multiples de trois* et diverses simplifications :

$$\frac{1}{81} \times 4 = \left(\frac{1}{81} \otimes 2\right) \otimes 2 = \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{405}\right) \otimes 2 = \left(\frac{1}{45} \otimes 2\right) + \left(\frac{1}{3 \times 135} \otimes 2\right) = \frac{1}{30} + \frac{1}{90} + \frac{1}{270} + \frac{1}{810} =$$

$$= \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{270}\right) + \left(\frac{1}{90} + \frac{1}{810}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{81},$$

$$\frac{1}{81} \times 8 = \left(\frac{1}{81} \times 4\right) \otimes 2 = \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{90} + \frac{1}{270} + \frac{1}{810}\right) \otimes 2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2 \times 15} \otimes 2\right) + \left(\frac{1}{2 \times 45} \otimes 2\right) + \left(\frac{1}{2 \times 135} \otimes 2\right) + \left(\frac{1}{2 \times 405} \otimes 2\right) = \frac{1}{15} + \frac{1}{45} + \frac{1}{135} + \frac{1}{405},$$

ou, d'après R2/27 et R2/81,

$$\frac{1}{81} \times 8 = \left(\frac{1}{81} \times 4\right) \otimes 2 = \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{81}\right) \otimes 2 = \left(\frac{1}{27} \otimes 2\right) + \left(\frac{1}{81} \otimes 2\right) = \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{45} + \frac{1}{405}.$$

La décomposition

⁵ Voir aussi l'annexe E 8 : décompositions relatives aux carrés de nombres impairs.

$$(B_{81}) \quad \frac{2}{81} = \frac{1}{54} + \frac{1}{243} + \frac{1}{486} = \frac{1}{54} + \frac{1}{81 \times 3} + \frac{1}{81 \times 6} \quad \text{avec} \quad 2 = (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6},$$

revient à écrire différemment le *manque* dans la division de 2 par 81 que nous avons effectuée pour obtenir les expressions données par l'Auteur. Quant aux *doubléments éventuels*, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{81} \times 4 &= (\frac{1}{81} \otimes 2) \otimes 2 = (\frac{1}{54} + \frac{1}{243} + \frac{1}{486}) \otimes 2 = (\frac{1}{2 \times 27} \otimes 2) + (\frac{1}{3 \times 81} \otimes 2) + (\frac{1}{2 \times 243} \otimes 2) = \\ &= \frac{1}{27} + \frac{1}{162} + \frac{1}{243} + \frac{1}{486} = \frac{1}{27} + (\frac{1}{81 \times 2} + \frac{1}{81 \times 3} + \frac{1}{81 \times 6}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{81}. \end{aligned}$$

Après simplification, nous retrouvons l'expression obtenue précédemment. Tout ceci suffit pour montrer le peu d'intérêt de la décomposition (B_{81}) .

En résumé, pour les *doubléments éventuels*, nous avons le tableau suivant indiquant le nombre de quantités figurant dans les expressions précitées de 4/81 et de 8/81 (rappelons que nous soulignons celles où nous avons fait usage de simplifications) :

	(d_{81})	(A_{81})	(B_{81})
4/81	2	4 <u>2</u>	4 <u>2</u>
8/81	3	4	4

EN GUISE DE CONCLUSION

La présentation écrite par Âhmès ne laisse aucun doute. *Les expressions de 2 à partir de 81* ont été obtenues en effectuant la division de 2 par 81 selon le procédé des « multiples de trois ».

Il ne semble pas que l'Auteur ait retenu le fait que le nombre 81 soit le carré du nombre 9, ou même qu'il soit divisible par 9 auquel cas nous pourrions appliquer la procédure générale relative aux « multiples de neuf », technique qui consisterait à effectuer la division de 2 par 81 comme suit :

1	81	(initialisation)
1/9	9	(division par 9 ou « table de carrés »)
2/3 de 1/9	6	(« table de deux-tiers »)
1/3 de 1/9	3	(dédoublément)
1/27	3	(simplification)
\ 1/54	1 1/2	(dédoublément)
Manque	1/2	(2_{81})
\ 1/162	1/2	(inversion-multiplication)

Il se peut que l'Auteur ait remarqué qu'il devrait alors introduire le multiplicateur 2/3 en cours de calcul et que, par suite, il était plus utile de le considérer au début, ce qui conduit à mettre en œuvre la procédure relative aux « multiples de trois ». De l'étude que nous venons d'effectuer, il ressort que cette technique est la « meilleure » pour le nombre 81.

Bibliographie

- Abdulaziz, 2008, On the Egyptian method of decomposing $2/n$ into fractions, p. 3.
British Museum, 1898, *Facsimile of the Rhind Mathematical Papyrus*, pl. VI.
Bruckheimer, Salomon, 1977, Some comments on R. J. Gillings' analysis of the $2/n$ table in the Rhind Papyrus, p. 450.
Bruins, 1975₁, The Part in Ancient Egyptian Mathematics, p. 244.
Chace, Manning, 1927, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 58.
Chace, Bull, Manning, 1929, *The Rhind Mathematical Papyrus*, ph. VI-VII, pl. 27.
Chace, 1979, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 32.
Clagett, 1999, *Ancient Egyptian Science*, pp. 131, 339.
Eisenlohr, 1877 (1999), *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter*, p. 44, pl. VII.
Gillain, 1927, *La science égyptienne*, pp. 152-153.
Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*, p. 66.
Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, p. 100.
Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece, p. 166.
Loria, 1892, Congettura e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani, pp. 100, 102.
Peet, 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 45, pl. C.
Reineke, 1964, *Die Mathematischen Texte der alten Ägypter*, I₄₀, p. 90.
Robins, Shute, 1987, *The Rhind mathematical papyrus*, pl. 6-7.
Tannery, 1884, Questions héroniennes, p. 335.
Vogel, 1929, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, p. 126.